Capítulo
2
Introdução ao estudo das funções

As contínuas transformações de fenômenos naturais decorrentes de outros caracterizam um aspecto de interdependência. No desenvolvimento científico, as ideias de transformação e interdependência levaram ao conceito de função.

O movimento das marés é um fenômeno da natureza bastante conhecido. As pessoas que moram à beira do mar e, especialmente, as que dele vivem, como os pescadores, são capazes de prever esse movimento em função das posições da Lua e do Sol. Embora as previsões dessas pessoas sejam, em grande parte, intuitivas, a Física demonstra que, de fato, o Sol e a Lua exercem uma força gravitacional sobre a Terra, que varia de acordo com sua posição em relação à Terra. Assim, o movimento das marés pode ser descrito em função da força gravitacional.

Para pensar

1. Dê exemplos de fenômenos da natureza ou situações do dia a dia em que a medida de uma grandeza dependa de outra.
2. O preço do quilograma de uma espécie de peixe é R$ 15,00. Sabendo que uma pessoa pagou y reais por x quilogramas desse peixe, formule uma equação relacionando x e y.

Seção 2.1

Sistemas de coordenadas

Objetivo

- **Representar** pontos no plano cartesiano.

Termos e conceitos

- sistema cartesiano ortogonal
- par ordenado

Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

Em uma viagem de férias, um automóvel sofre um pequeno acidente em uma rodovia. O motorista, imediatamente, liga para a companhia de seguros.

O atendente, depois de obter as informações necessárias, pergunta:

– Em que ponto da rodovia ocorreu o acidente?

O motorista, olhando para uma marca de quilometragem ao lado da rodovia, responde:

– Exatamente no quilômetro 250.

Essa informação do motorista fornece a **coordenada** do ponto em que ele está na rodovia.

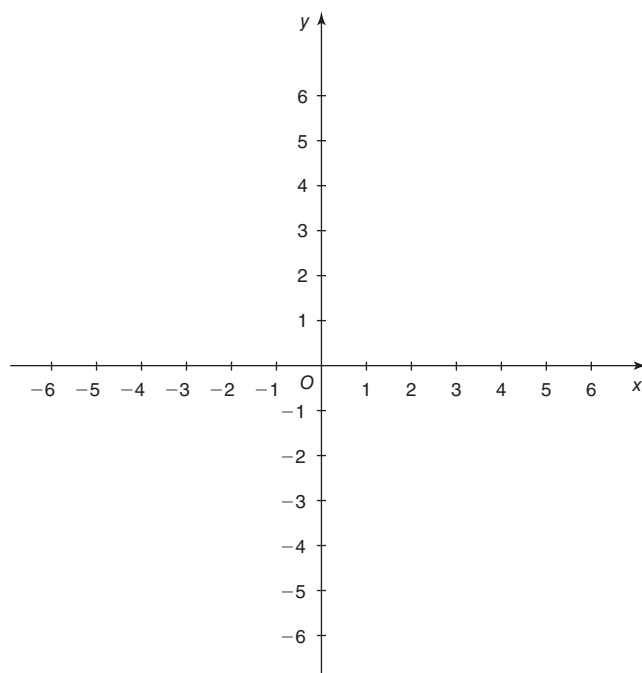
Em muitas outras situações do cotidiano, necessitamos de um sistema de coordenadas. Por exemplo:

- Um ponto da superfície da Terra é determinado por duas coordenadas: a latitude e a longitude.
- Um ponto do espaço aéreo é determinado por três coordenadas: a latitude, a longitude e a altitude.

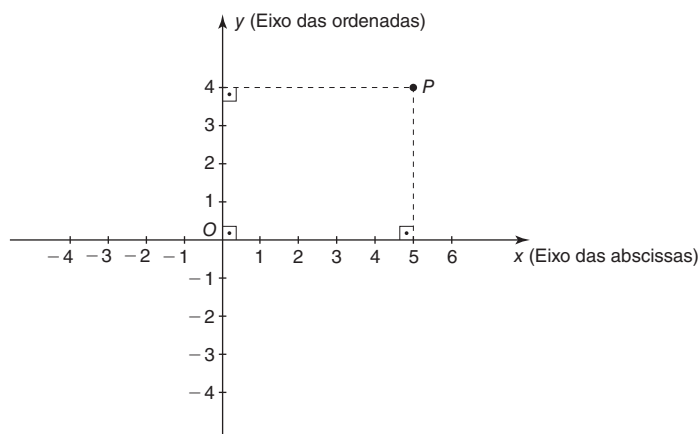
Do mesmo modo, para localizar um ponto em um plano, podemos adotar um sistema de coordenadas. O mais usual é o **sistema cartesiano ortogonal de coordenadas**, que apresentaremos a seguir.

A palavra **ortogonal** tem origem no latim (*orthogōnius*) e significa "que forma ângulo reto". Assim, esse sistema é **ortogonal** porque os eixos formam ângulos retos entre si.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para localizar um ponto no plano, podemos fixar nesse plano um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, que é formado por dois eixos, Ox e Oy, perpendiculares entre si no ponto O.

René Descartes (1596-1650). Embora o conceito de sistema de coordenadas já fosse utilizado por outros matemáticos, coube a Descartes a sua formalização, na obra *La Géométrie* (1637).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Por exemplo, para determinar as coordenadas do ponto P da figura a seguir, traçamos por P as perpendiculares a Ox e Oy, obtendo, nesses eixos, dois números chamados de **abscissa** e **ordenada** do ponto P, respectivamente.

No exemplo, as **coordenadas** do ponto P são 5 e 4. A **abscissa** é 5, e a **ordenada** é 4. Indicamos esse fato por $P(5, 4)$.

A representação (5, 4) é chamada de "**par ordenado** de abscissa 5 e ordenada 4".

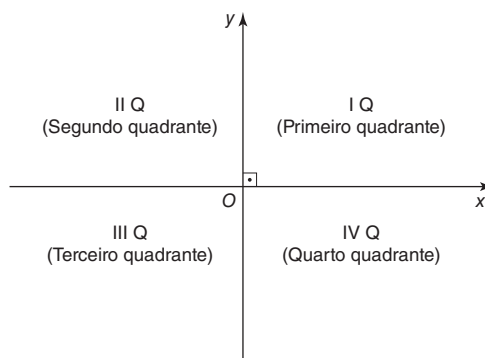
Generalidades

1. Dois pares ordenados de números reais são iguais se, e somente se, suas abscissas são iguais e suas ordenadas são iguais, isto é:

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$

Por exemplo:

$(a, 8) = (7, y) \Leftrightarrow a = 7$ e $y = 8$

2. Os eixos Ox e Oy, chamados de **eixos coordenados**, separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, que devem ser enumerados conforme a figura:

$P(a, b) \in \text{I Q} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b > 0$

$P(a, b) \in \text{II Q} \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b > 0$

$P(a, b) \in \text{III Q} \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b < 0$

$P(a, b) \in \text{IV Q} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0$

Por exemplo:

$(4, 2) \in \text{I Q}; \left(-\frac{1}{2}, 9\right) \in \text{II Q}; (-3, -5) \in \text{III Q e} \left(\frac{3}{2}, -1\right) \in \text{IV Q}$

Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.

3. Todo ponto de abscissa nula (igual a zero) pertence ao eixo Oy, e todo ponto de ordenada nula (igual a zero) pertence ao eixo Ox.

Por exemplo:

$(0, -2) \in Oy$ e $(5, 0) \in Ox$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

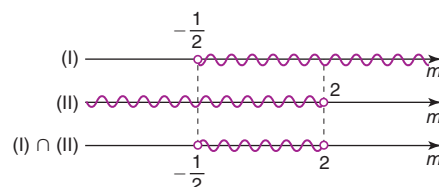
EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 Obter os valores reais de m de modo que o ponto $P(2m + 1, 3m - 6)$ pertença ao quarto quadrante.

Resolução

O ponto P pertence ao quarto quadrante se, e somente se:

$$\begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ 3m - 6 < 0 \end{cases} \text{ ou seja: } \begin{cases} m > -\frac{1}{2} & \text{(I)} \\ m < 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Efetuando a intersecção de (I) e (II), temos:

Portanto, concluímos que: $-\frac{1}{2} < m < 2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Represente, no plano cartesiano, os seguintes pontos:
$A(4, 2)$ $B(2, 4)$ $C(-2, 5)$ $D(5, -2)$ $E(-4, -1)$ $F(-1, 4)$ $G(-6, 0)$ $H(0, -6)$ $I(0, 0)$

2 Para que valores reais de p o ponto $A\left(p - 7, \frac{4}{5}\right)$ pertence ao eixo das ordenadas?

3 Para que valores reais de k o ponto $B(5k + 15, 4k^2 - 36)$ pertence ao eixo das abscissas?

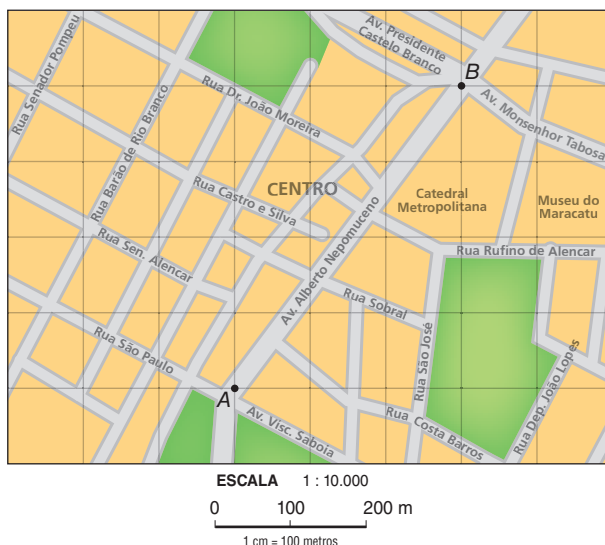
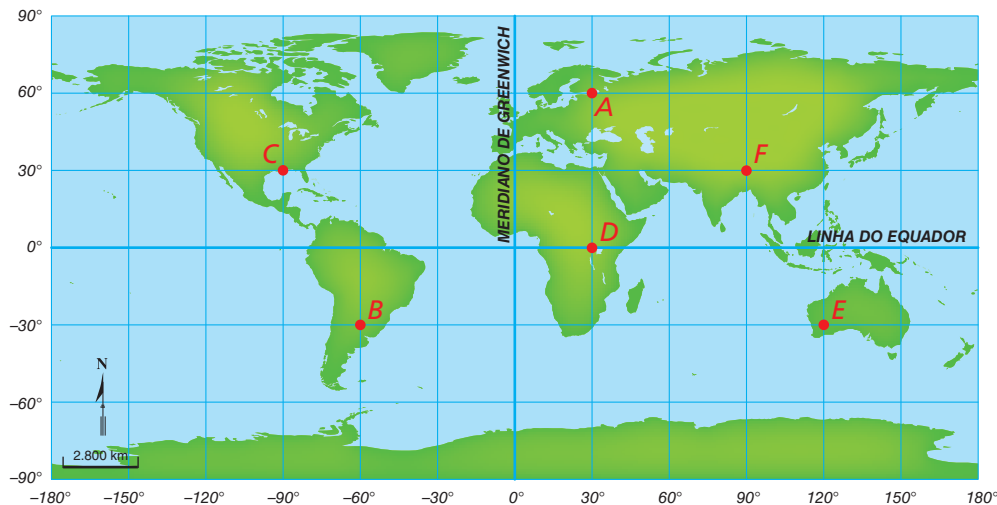
4 Para que valores reais de r o ponto $C\left(\frac{2}{3}, r - 2\right)$ pertence ao 1º quadrante?

5 Para que valores reais de m o ponto $C(5m - 8, m + 2)$ pertence ao 2º quadrante?

6 Determine os números reais a e b de modo que $(3a - 2b, a + b) = (10, 11)$.

7 O mapa ao lado está na escala 1 : 10.000. Sabendo que o quadriculado é formado por quadradinhos de 1 cm de lado, calcule a distância real entre os pontos da região representada, que correspondem no mapa a A e B.

Fonte: *Guia Quatro Rodas — Brasil*. São Paulo: Abril, 2010.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8 Um ponto P sobre a superfície da Terra é determinado por dois números chamados **latitude** e **longitude**. A latitude de P é a medida em grau do menor arco possível sobre um meridiano ligando o ponto P à linha do equador. A longitude de P é a medida em grau do menor arco possível sobre um paralelo terrestre ligando o ponto P ao meridiano de Greenwich. Adotam-se como positivas a latitude ao norte do equador e a longitude a leste do meridiano de Greenwich, e como negativas a latitude ao sul do equador e a longitude a oeste do meridiano de Greenwich. Um ponto sobre o equador tem latitude 0° e um ponto sobre o meridiano de Greenwich tem longitude 0°. Indica-se o ponto P pelo par ordenado (x, y), sendo x a latitude e y a longitude.
O mapa abaixo é uma projeção plana da superfície terrestre.

Fonte: FERREIRA, Graça Maria Lemos. *Atlas geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2003.

I. Entre os pontos assinalados em vermelho no mapa, determine as coordenadas do ponto:

a) assinalado na região que corresponde à América do Sul.
b) assinalado na região que corresponde à África.
c) assinalado na região que corresponde à América do Norte.
d) assinalado na região que corresponde à China.
e) assinalado na região que corresponde à Europa.
f) assinalado na região que corresponde à Austrália.

II. Em que continente está o ponto de latitude 60° norte e longitude 120° leste?

Resolva os exercícios complementares 1 a 4 e 26.

O conceito de função

Objetivos

- **Reconhecer** uma função em situações do cotidiano.
- **Identificar** o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de uma função.
- **Determinar** a imagem de um elemento do domínio.

Termos e conceitos

- função
- domínio
- contradomínio
- conjunto imagem

A noção de função no cotidiano

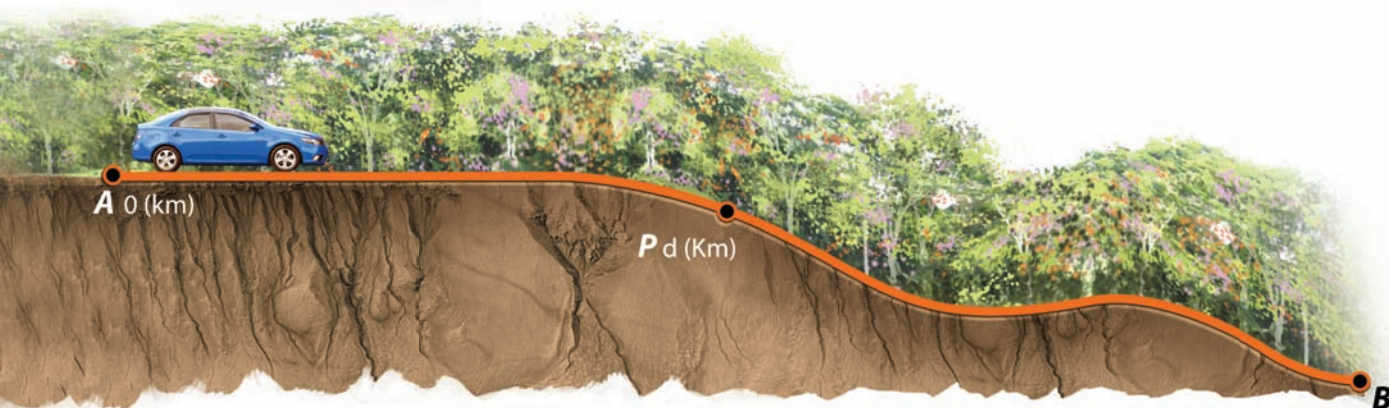
Usamos medidas para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de uma região, a profundidade de um rio etc.

Toda característica que pode ser expressa por uma medida é chamada de **grandeza**.

São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa e vazão.

A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto depende da variação das medidas de outras grandezas. Por exemplo: o crescimento de uma planta depende do tempo; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura; a pressão no mar depende da profundidade. Para estudar essas relações de dependência, podemos recorrer a equações matemáticas que relacionem as grandezas envolvidas.

Para exemplificar, vamos supor que um automóvel percorra um trecho *AB* de uma estrada à velocidade constante de 80 km/h.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Considerando *A* como ponto de partida, vamos associar a ele a marca 0 km. A cada ponto *P* do trecho *AB*, vamos associar a marca *d* km, que indica a distância de *A* até *P*, medida ao longo da trajetória.

Que distância terá percorrido o automóvel após 2 horas da partida?

Como a velocidade do automóvel é constante, 80 km/h, a distância *d* percorrida por ele, em quilômetro, após 2 horas, será:

$$d = 80 \cdot 2 \Rightarrow d = 160$$

Raciocinando de maneira análoga, podemos construir a tabela abaixo, que expressa a distância *d*, percorrida pelo automóvel, após *t* horas de sua partida.

t (hora)	*d* (quilômetro)
1	80
2	160
3	240
4	320
⋮	⋮

Note que, a cada valor de t, associamos um único valor de d. Por isso, dizemos que a distância d é dada em **função** do tempo.

Embora seja útil, a tabela da página anterior apresenta limitações, pois, por mais que acrescentemos valores a t, sempre haverá valores a ser acrescentados. Por exemplo, a tabela não contém uma linha correspondendo a $t = 2{,}5$ h e, mesmo que acrescentássemos essa linha, não haveria uma linha correspondendo a $t = 2{,}51$ h, e assim por diante. Assim, para representar todos os tempos decorridos e as respectivas distâncias, é mais adequado usar uma equação que relacione a distância percorrida e o tempo; essa equação é:

$$d = 80t$$

Observe que essa equação substitui com vantagens a tabela anterior, pois fornece a distância percorrida em qualquer tempo após a partida, e vice-versa:

- Para determinar a distância d, em quilômetro, após 2,5 horas da partida, basta substituir t por 2,5:

$$d = 80 \cdot 2{,}5 \Rightarrow d = 200$$

- Para determinar o tempo transcorrido, em hora, quando a distância percorrida pelo automóvel é 400 km, basta substituir d por 400:

$$400 = 80t \Rightarrow t = 5$$

Da mesma maneira que relacionamos as grandezas d e t, podemos relacionar outras grandezas, de modo que a **cada valor** de uma seja associado **um único valor** da outra. Relações como essas são chamadas de **funções**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

a) Em um termômetro, a temperatura é dada em **função** do comprimento da coluna de mercúrio (ou de álcool), isto é, a cada comprimento ℓ da coluna está associada uma **única** temperatura.

b) O preço de uma peça de tecido é dado em **função** da metragem desse tecido, isto é, a cada metragem associa-se um **único** preço.

c) Ao despejar água em uma piscina, o nível da superfície da água em relação ao fundo da piscina é dado em **função** da quantidade de água despejada, isto é, para cada quantidade de água despejada é associado um **único** nível da superfície da água.

Dizemos que uma variável y é dada em **função** de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y.

A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de **lei de associação**, ou simplesmente lei entre x e y. Quando possível, essa lei é expressa por uma equação.

Notas:

1. Podemos abreviar a expressão "y é dada em função de x" por "y é função de x".
2. No contexto das funções numéricas, define-se **variável** como um representante genérico dos elementos de um conjunto de números. Usualmente, indicamos uma variável por uma letra. Por exemplo, ao dizer que x é uma variável real, estamos afirmando que x simboliza um número real qualquer.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2 Ao completar o tanque de seu carro em um posto de abastecimento, o motorista olhou para a bomba e observou que havia colocado 26 litros de gasolina e que o total a pagar era R$ 72,80.

a) Determinar o valor que o motorista teria pago se colocasse apenas 20 litros de gasolina.

b) Considerando o montante de gasolina despejada no tanque em cada instante do abastecimento, o preço a pagar é função desse montante? Por quê?

c) Indicando por y o preço a pagar por x litros de gasolina, formular uma equação que relacione x e y.

Resolução

a) O preço, em real, do litro de gasolina é o quociente de 72,80 por 26, que é 2,80. Logo, por 20 litros de gasolina, o motorista pagaria, em real, $20 \cdot 2{,}80$, ou seja, R$ 56,00.

b) O preço a pagar é função do montante de gasolina, pois, para cada montante de gasolina despejado no tanque, associa-se um único preço.

c) Como o preço do litro de gasolina é R$ 2,80, o preço y de x litros é dado por: $y = 2{,}80 \cdot x$

3 Um edifício tem dois apartamentos por andar, inclusive no andar térreo. Os apartamentos são numerados do seguinte modo: os do andar térreo têm números 01 e 02, os do primeiro andar têm números 11 e 12, os do segundo andar têm números 21 e 22, e assim por diante.

Considerando a correspondência que associa cada número de andar a um número de apartamento, responder às questões.

a) O andar de número 3 está associado a que números de apartamento?

b) A numeração dos apartamentos é dada em função da numeração dos andares? Por quê?

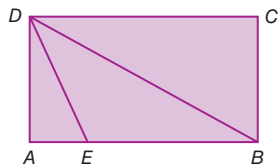
Resolução

a) O andar de número 3 está associado aos números de apartamento 31 e 32.

b) A numeração dos apartamentos não é função da numeração dos andares, pois, para cada número de andar, estão associados dois números de apartamento. Nesse caso, todos os números de andar estão associados a mais de um número de apartamento, mas bastaria que houvesse **pelo menos um** número de andar associado a mais de um valor para que a correspondência não fosse função.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9 A figura *ABCD* é um retângulo tal que: $BD = 6$ cm, $AD = 3$ cm, *E* é um ponto do lado $\overline{AB}$ e $AE = x$.

Determine a lei que expressa a área y do triângulo *BDE* em função de *x*.

10 Um metalúrgico recebe R$ 12,00 por hora trabalhada até o limite de 44 horas semanais, sendo acrescidos 30% no salário/hora a cada hora que exceder o limite.

a) Complete a tabela:

Horas semanais trabalhadas	Ganho pelas horas trabalhadas (R$)
20	
32	
44	
46	
50	

b) O ganho pelas horas trabalhadas é uma função do número de horas semanais trabalhadas? Por quê?

c) Indicando por y o ganho por *x* horas de trabalho semanal, com $x \leq 44$, elabore uma equação que expresse y em função de *x*.

d) Indicando por y o ganho por *x* horas de trabalho semanal, com $x > 44$, elabore uma equação que expresse y em função de *x*.

11 Um consumidor comprou um automóvel por R$ 20.000,00, constatando que, ao final de cada ano de uso, o valor de mercado do veículo diminui para 90% do valor de um ano atrás. Veja na tabela a seguir os valores do automóvel até o final do 2º ano.

Tempo de uso do automóvel (ano)	Valor de mercado (R$)
0	20.000
1	$0,9 \cdot 20.000$
2	$0,9 \cdot 0,9 \cdot 20.000 = (0,9)^2 \cdot 20.000$

a) Determine o valor do automóvel ao final de 3 anos de uso.

b) Determine o valor do automóvel ao final de *x* anos de uso.

c) Indicando por y o valor de mercado do automóvel com *x* anos de uso, obtenha uma equação que relacione y e *x*.

d) O valor de mercado do automóvel é dado em função do tempo de uso? Por quê?

12 Para encher uma piscina, que estava vazia, foi aberta uma torneira cuja vazão é de 26 litros por minuto.

a) Indicando por y o volume em litro de água despejada pela torneira em *x* minutos, obtenha uma equação que relacione *x* e y.

b) O volume de água despejada é função do tempo? Por quê?

13 Cada ônibus de uma companhia de viação tem 36 lugares, numerados de 1 a 36. Os 50 ônibus da companhia são numerados de 1.001 a 1.050.

Considere a correspondência que associa cada número de assento a um número de ônibus.

a) O número de assento 25 está associado a que número(s)?

b) A numeração dos ônibus é dada em função da numeração dos assentos? Por quê?

14 Em um termômetro, a variação do comprimento da coluna de mercúrio é proporcional à variação da temperatura, obedecendo à razão $\frac{8}{5}$; por exemplo, o comprimento da coluna de mercúrio aumenta 8 mm para cada 5 °C de aumento na temperatura; e diminui 8 mm para cada 5 °C de diminuição na temperatura. Sabe-se que, à temperatura de 0 °C, o comprimento da coluna é 40 mm.

a) Construa uma tabela apresentando os valores, em grau Celsius (°C), e os respectivos comprimentos da coluna, em milímetro, com os registros da temperatura variando de 5 °C em 5 °C desde -15 °C até 15 °C.

b) O comprimento da coluna de mercúrio é dado em função da temperatura? Por quê?

c) Indicando por y o comprimento da coluna de mercúrio, em milímetro, para cada temperatura *x*, em grau Celsius, formule uma equação que relacione *x* e y.

Resolva os exercícios complementares 27 a 29.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Formalização do conceito de função

Vimos que uma função associa cada valor de uma grandeza a um único valor de outra grandeza. Por exemplo: a cada medida de tempo associa-se uma única distância percorrida por um automóvel; a cada comprimento da coluna de mercúrio de um termômetro associa-se uma única temperatura; a cada metragem de tecido associa-se um único preço. Desse modo, podemos considerar uma função como um conjunto de pares ordenados de números reais: (tempo, distância); (comprimento, temperatura); (metragem, preço).

Essa ideia permite a generalização do conceito de função, que depende do conceito de relação entre conjuntos definido a seguir.

Quando uma torneira é aberta, o volume de água despejada é função do tempo, pois para cada medida de tempo associa-se um único volume de água.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Relação entre conjuntos

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, chama-se **relação** de A em B qualquer conjunto de pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $x \in B$.

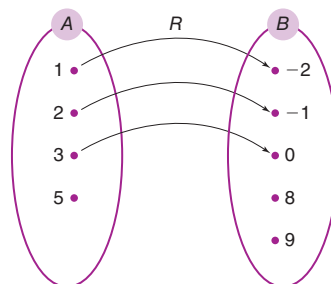
Exemplo

Sendo $A = \{1, 2, 3, 5\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 8, 9\}$, a relação R de A em B, que associa um elemento x de A ao elemento $x - 3$ de B, pode ser obtida pela tabela:

x	$x - 3$
1	−2
2	−1
3	0
5	?

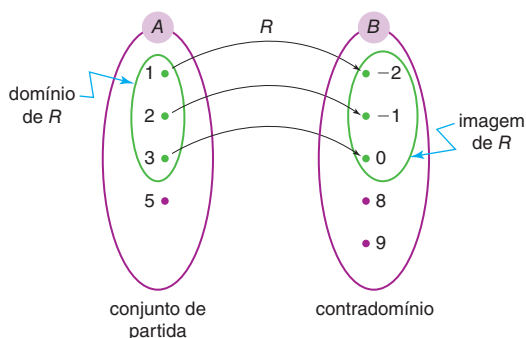
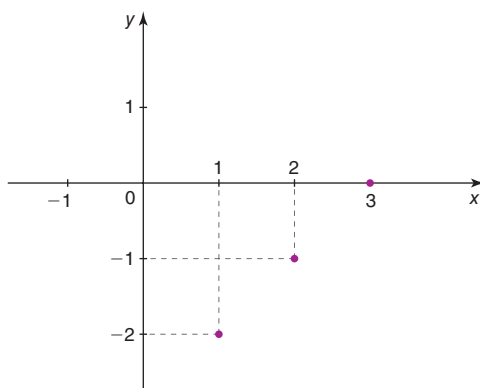
Observe que o elemento 5 de A não tem correspondente em B, pois $5 - 3 = 2$ e 2 não pertence a B. Assim, a relação R é dada por:

$$R = \{(1, -2), (2, -1), (3, 0)\}$$

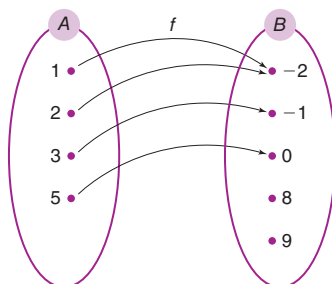
Outra forma de representar essa relação é pelo diagrama de flechas a seguir:

Para qualquer relação de A em B:

- o conjunto A é chamado de **conjunto de partida** da relação;
- o conjunto B é chamado de **contradomínio** da relação e é simbolizado por $CD(R)$;

- o conjunto formado pelos elementos de A que têm correspondentes em B, através de R, é chamado de **domínio** da relação e é simbolizado por $D(R)$;
- o conjunto formado pelos elementos de B que têm correspondentes em A, através de R, é chamado de **conjunto imagem** da relação e é simbolizado por $Im(R)$.

Para o exemplo anterior, temos $D(R) = \{1, 2, 3\}$ e $Im(R) = \{-2, -1, 0\}$.

Também podemos representar essa relação por um gráfico cartesiano, que é formado pelos pontos determinados pelos pares ordenados da relação. Veja abaixo.

Com base na definição de relação, formalizamos, a seguir, o conceito de função.

Função

Vamos considerar uma relação f de A em B tal que **qualquer** elemento de A esteja associado, através de f, a um único elemento de B:

Essa propriedade caracteriza um tipo particular de relação, ao qual damos o nome de **função** de A em B. Assim, definimos:

> Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma relação f de A em B é **função** se, e somente se, qualquer elemento de A está associado, através de f, a um único elemento de B.
> Adotaremos a notação $\boldsymbol{f: A \rightarrow B}$ para indicar que f é uma função de A em B.

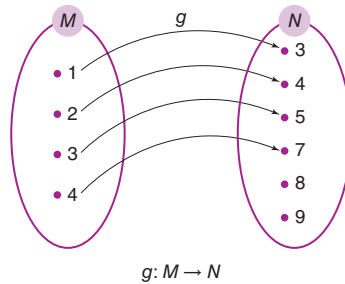
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Destacamos que, como uma função $f: A \longrightarrow B$ é um tipo particular de relação, temos:

- o **domínio** da função é o próprio conjunto de partida, isto é, $D(f) = A$;
- o **contradomínio** da função é o conjunto $CD(f) = B$;
- o **conjunto imagem** da função é o conjunto $Im(f) = \{y \in B \mid (x, y) \in f\}$.

Exemplos

a) A relação g, abaixo, é uma função de M em N, pois qualquer elemento de M tem, através de g, um único correspondente em N.

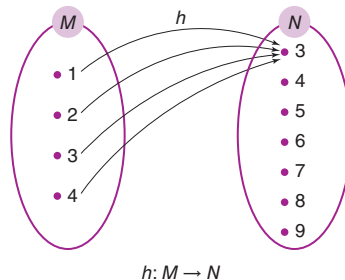
$g: M \longrightarrow N$

O domínio $D(g)$, o contradomínio $CD(g)$ e o conjunto imagem $Im(g)$ dessa função são dados por:

$D(g) = M = \{1, 2, 3, 4\}$

$CD(g) = N = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

$Im(g) = \{3, 4, 5, 7\}$

b) A relação h, abaixo, é uma função de M em N, pois qualquer elemento de M tem, através de h, um único correspondente em N.

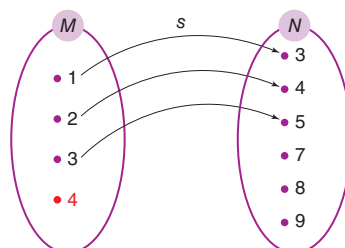
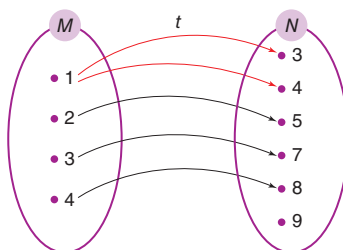
$h: M \longrightarrow N$

$D(h) = M = \{1, 2, 3, 4\}$

$CD(h) = N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$Im(h) = \{3\}$

Contraexemplos

a) A relação s, abaixo, não é função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 4) que não está associado, através de s, a algum elemento de N.

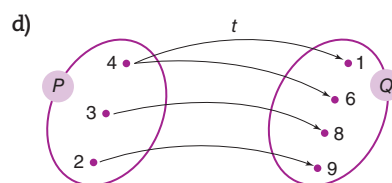
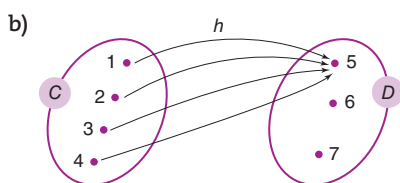
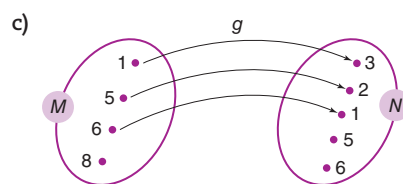
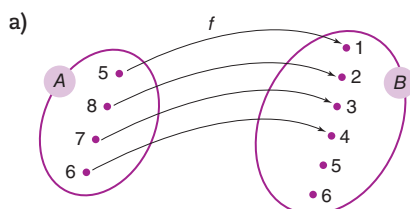
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) A relação t, abaixo, não é função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 1) que está associado, através de t, a mais de um elemento de N.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4 Quais das seguintes correspondências, f, g, h ou t, representam funções?

a)

c)

b)

d)

Resolução

a) f é função de A em B, pois todo elemento de A está associado, através de f, a um único elemento de B.

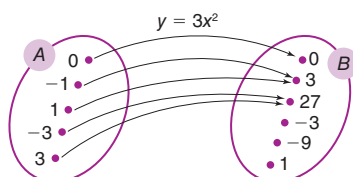
b) h é função de C em D, pois todo elemento de C está associado, através de f, a um único elemento de D.

c) g não é função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 8) que não está associado, através de g, a algum elemento de N.

d) t não é função de P em Q, pois existe elemento em P (o elemento 4) associado, através de t, a mais de um elemento de Q.

5 Dados os conjuntos $A = \{0, -1, 1, -3, 3\}$ e $B = \{0, 3, 27, -3, -9, 1\}$, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função f dada pela correspondência $y = 3x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Resolução

Representamos a função por um diagrama de flechas:

Assim, temos:

$D(f) = A = \{0, -1, 1, -3, 3\}$

$CD(f) = B = \{0, 3, 27, -3, -9, 1\}$

$Im(f) = \{0, 3, 27\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

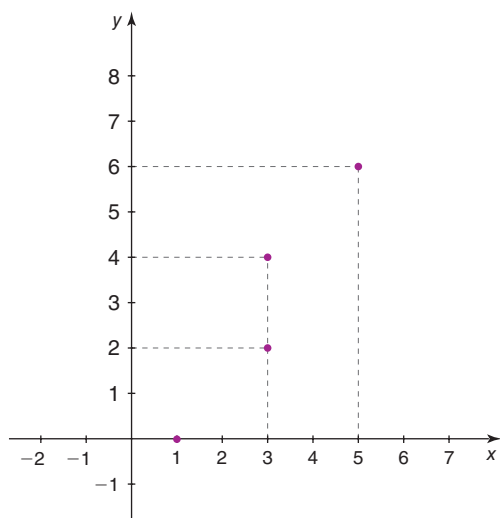
15 Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5, 8\}$, quais das relações apresentadas a seguir são funções de A em B?

a) $y = \frac{1}{x}$, em que $x \in A$ e $y \in B$

b) $y = x^2 + 1$, em que $x \in A$ e $y \in B$

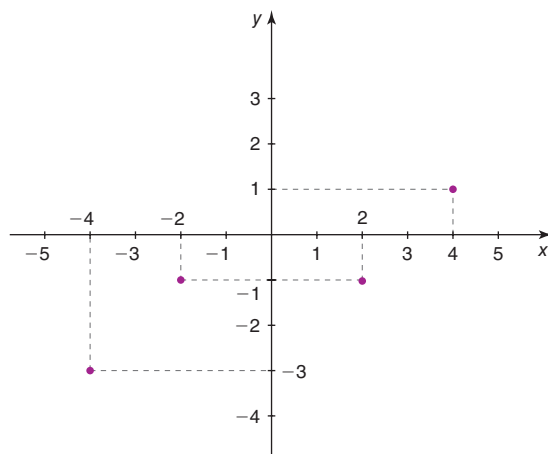
c) $y^2 = x^2$, em que $x \in A$ e $y \in B$

d) $y = x^3$, em que $x \in A$ e $y \in B$

16 O gráfico abaixo representa uma relação h de $M = \{1, 3, 5\}$ em $N = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

a) Construir o diagrama de flechas dessa relação.

b) Determinar o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem dessa relação.

c) Essa relação é uma função de M em N? Por quê?

17 O gráfico abaixo representa uma relação s de $P = \{-4, -2, 2, 4\}$ em $Q = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$.

a) Construir o diagrama de flechas dessa relação.

b) Determinar o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem dessa relação.

c) Essa relação é uma função de P em Q? Por quê?

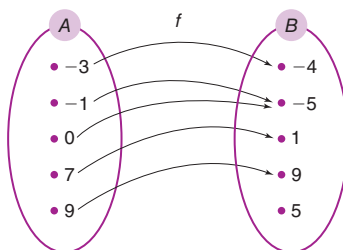
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Imagem de *x* pela função *f*

Se (x, y) pertence a uma função f, a ordenada y é chamada de **imagem de *x* pela função *f*** (ou imagem de x através de f). Indicaremos esse fato por $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Vamos estudar algumas particularidades dessa imagem.

Imagem de um elemento pelo diagrama de flechas

Considere a função f descrita pelo diagrama de flechas:

Se um elemento y de B estiver associado, através de f, a um elemento x de A, diremos que y é a imagem de x através de f.

Assim, temos:

$-4 = f(-3)$, ou seja, -4 é imagem de -3 através de f

$-5 = f(-1)$, ou seja, -5 é imagem de -1 através de f

$-5 = f(0)$, ou seja, -5 é imagem de 0 através de f

$1 = f(7)$, ou seja, 1 é imagem de 7 através de f

$9 = f(9)$, ou seja, 9 é imagem de 9 através de f

Imagem de um elemento pela lei $y = f(x)$

Vamos considerar a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que cada elemento x do domínio $\mathbb{R}$ é associado a um único elemento do contradomínio $\mathbb{R}$ através da lei $f(x) = 5x - 2$.

A lei $f(x) = 5x - 2$ informa que a imagem de cada x do domínio é o número $5x - 2$ do contradomínio. Assim, temos, por exemplo:

- a imagem do elemento 6, através de f, é: $f(6) = 5 \cdot 6 - 2 \Rightarrow f(6) = 28$
  Logo, o par ordenado (6, 28) pertence a f.
- a imagem do elemento $\frac{3}{5}$, através de f, é: $f\left(\frac{3}{5}\right) = 5 \cdot \frac{3}{5} - 2 \Rightarrow f\left(\frac{3}{8}\right) = 1$

  Logo, o par ordenado $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$ pertence a f.

Nota:

Como o símbolo $f(x)$ representa a ordenada do ponto de abscissa x, em vez de escrever $f(x) = 5x - 2$, podemos escrever $y = 5x - 2$, ou seja, o símbolo $f(x)$ pode ser substituído por y, e vice-versa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6 Sendo a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$, qual é o elemento do domínio de f que possui como imagem o número 6?

Resolução

Sendo a o elemento procurado, devemos ter $f(a) = 6$, isto é:

$$\frac{3a}{a - 2} = 6$$

Assim, obtemos:

$$3a = 6a - 12 \Rightarrow 3a = 12$$

Portanto, $a = 4$.

7 Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é tal que $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ e $f(1) = 9$. Calcular:

a) $f(2)$

b) $f(0)$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

Resolução

a) Podemos escrever $2 = 1 + 1$; logo:

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = 9 \cdot 9 \Rightarrow f(2) = 81$$

b) Podemos escrever $0 = 0 + 0$; logo:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0)$$

Por hipótese, $f(0) \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, temos:

$$f(0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow \frac{f(0)}{f(0)} = f(0)$$

$\therefore f(0) = 1$ ($\therefore$ lemos "portanto".)

c) Podemos escrever $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; logo, temos:

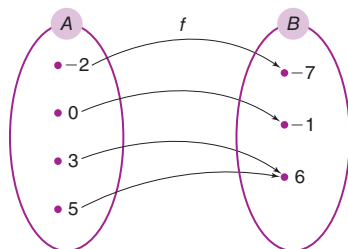
$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

Por hipótese, $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}_+^*$ e $f(1) = 9$; logo, temos:

$$f(1) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow 9 = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18 O diagrama abaixo representa uma função $f: A \to B$.

Calcule:

a) $f(-2)$ **b)** $f(0)$ **c)** $f(3) + f(5)$

19 Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5 - x$, calcule:

a) $f(0)$ **b)** $f(3)$ **c)** $f(-2)$ **d)** $f\left(\frac{1}{2}\right)$

20 Sendo a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1 + x^2}{x}$, calcule:

a) $f(2)$ **b)** $f(-2)$ **c)** $f\left(\frac{1}{4}\right)$ **d)** $f\left(-\frac{1}{4}\right)$

21 Seja g a função de domínio $A = \{1, -1, 2, -2, 0, 3\}$ e contradomínio $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^3 - x + 1$. Determine o conjunto imagem de g.

22 Considere a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x}$. Que números do domínio de f possuem como imagem o número 4?

23 Uma função $f: A \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \frac{x - 1}{x + 5}$ e $Im(f) = \left\{2, 0, -\frac{41}{7}\right\}$. Determine o domínio A.

24 Um fazendeiro estabelece o preço da saca de café, em função da quantidade de sacas adquiridas pelo comprador, usando a equação

$P(x) = 50 + \frac{200}{x}$, em que P é o preço da saca em dólares e x é o número de sacas vendidas.

a) Quanto deve pagar, por saca, um comprador que adquirir cem sacas?

b) Quanto deve pagar, por saca, um comprador que adquirir duzentas sacas?

c) Sabendo que um comprador pagou 54 dólares por saca, quantas sacas ele comprou?

25 Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = ax^2 + bx$, em que a e b são constantes reais. Determine os números reais a e b sabendo que $f(2) = 16$ e $f(-1) = 7$.

26 (IMT-SP) Uma função satisfaz a relação $f(2x) = 2f(x) + f(2)$ para qualquer valor real de x. Sabendo-se que $f(4) = 6$, calcule $f(16)$.

27 Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é tal que $f(3) = 1$ e $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$, $\forall\ a, b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Calcule:

a) $f(1)$ **b)** $f(9)$ **c)** $f(27)$ **d)** $f\left(\frac{1}{3}\right)$ **e)** $f\left(\sqrt{3}\right)$

28 (UFSM-RS) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $v(t) = at^2 + b$, em que $v(t)$ é o número de elementos vivos no tempo t (meses). Sabendo-se que o último frango morreu quando $t = 12$ meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estavam vivos no 10º mês era:

a) 80 **b)** 100 **c)** 120 **d)** 220 **e)** 300

Resolva os exercícios complementares 5 a 7 e 30 a 33.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Função real de variável real

Toda função cujos domínio e contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$ é chamada de **função real de variável real**. Por exemplo, a função $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = 2x - 5$ é uma função real de variável real, pois seu domínio ($\mathbb{N}$) e seu contradomínio ($\mathbb{Z}$) são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Estudo do domínio de uma função real de variável real

Uma forma de descrever precisamente uma função f é explicitar seu domínio, seu contradomínio e a lei que associa cada x do domínio ao correspondente y do contradomínio. Há casos, porém, em que a descrição de uma função pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação $y = f(x)$, ficando subentendidos o domínio e o contradomínio. Para esses casos, podemos estabelecer o seguinte:

> Uma função f pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação $y = f(x)$ se, e somente se, o domínio de f for o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ em que f pode ser definida e o contradomínio de f for $\mathbb{R}$.

Assim, dada a função $y = f(x)$, seu domínio $D(f)$ e seu contradomínio $CD(f)$ são os conjuntos:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \text{ e } CD(f) = \mathbb{R}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

- Considere a função dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Como o domínio e o contradomínio não foram explicitados, admitimos $CD(f) = \mathbb{R}$ e $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, pois:

$$\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0$$

- Considere a função dada por $g(x) = 5x$. Como o domínio e o contradomínio não foram explicitados, admitimos $CD(f) = \mathbb{R}$ e $D(f) = \mathbb{R}$, pois, para que $5x$ seja real, basta que x seja real:

$$5x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Note que, para encontrar o domínio de uma função $y = f(x)$, precisamos analisar a lei de associação de f e, assim, obter as restrições da variável x para que exista a função f. Essas restrições são chamadas de **condição de existência**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Determinar o domínio da função $f(x) = \frac{3}{x - 8}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\frac{3}{x - 8}$ também seja real.

Temos: $\frac{3}{x - 8} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 8 \neq 0$ (ou seja, $x \neq 8$)

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 8\}$

9 Determinar o domínio da função: $f(x) = \sqrt{x - 5}$

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\sqrt{x - 5}$ também seja real.

Temos: $\sqrt{x - 5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 5 \geqslant 0$ (ou seja, $x \geqslant 5$)

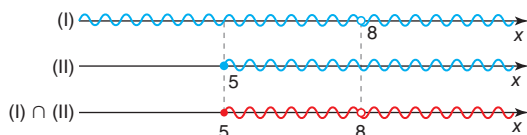
Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$

10 Determinar o domínio da função: $f(x) = \dfrac{3}{x-8} + \sqrt{x-5}$

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\dfrac{3}{x-8} + \sqrt{x-5}$ também seja real. Temos:

$$\frac{3}{x-8} + \sqrt{x-5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ \underbrace{x-8 \neq 0}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{x-5 \geq 0}_{\text{(II)}}$$

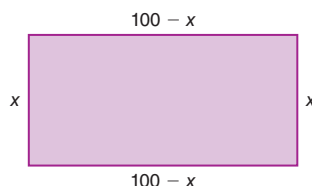
Lembrando que o conectivo "e" indica a intersecção das soluções das inequações (I) e (II), temos:

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \text{ e } x \neq 8\}$

11 Um granjeiro utilizou 200 metros lineares de tela para cercar um terreno retangular.

a) Obter a lei $y = f(x)$ que expressa a área y, em metro quadrado, do terreno em função da medida x, em metro, de um dos lados desse terreno.

b) No contexto do problema, qual é o domínio da função f obtida no item **a**?

Resolução

a) Sabemos que o perímetro do terreno é 200 m. Indicando por x a medida, em metro, de um lado do terreno, as outras dimensões, em metro, serão: x, $(100 - x)$ e $(100 - x)$.

Assim, a área y desse terreno é dada por: $f(x) = (100 - x) \cdot x$, ou seja, $f(x) = -x^2 + 100x$

b) Fora de qualquer contexto, o domínio da função $f(x) = -x^2 + 100x$ seria o conjunto $\mathbb{R}$; porém, no contexto do problema, os valores de x estão restritos às possíveis medidas de um lado do terreno. Como o perímetro do terreno é 200 m, temos: $0 < x < 100$.

Assim, o domínio de f é: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 100\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

29 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = 3x + 5$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 9}$

e) $f(x) = 15$

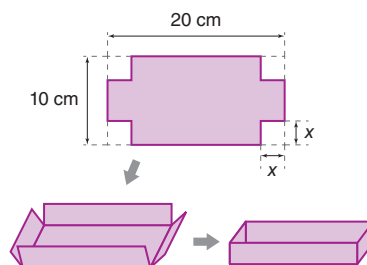
f) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 36} + \sqrt{x - 2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

30 O número 5 pertence ao domínio de $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-5}}$? Por quê?

31 Um professor propôs a seguinte atividade para sua turma.

Pegue uma folha retangular de cartolina, com 20 cm de comprimento por 10 cm de largura, e adote os seguintes procedimentos:

- recorte quatro quadrados de lado x cm, de modo que cada um deles tenha um vértice coincidindo com um vértice da folha;
- dobre essa folha formando uma caixa sem tampa, conforme mostra a figura:

Indique por $V(x)$ o volume, em centímetro cúbico, da caixa em função da medida x dos lados dos quadrados recortados.

a) Obtenha a equação que associa cada possível medida x ao volume $V(x)$.

b) Indique o domínio da função V.

Resolva os exercícios complementares 8 a 11.

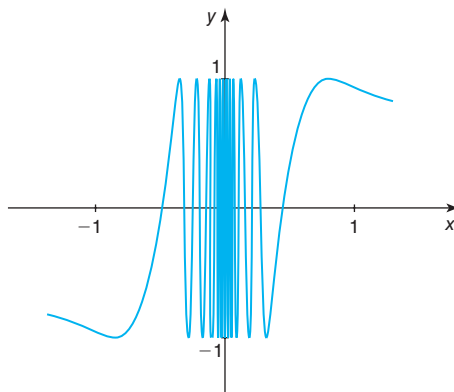
Seção 2.3

Gráfico de uma função

Objetivo

- **Construir** o gráfico de uma função.

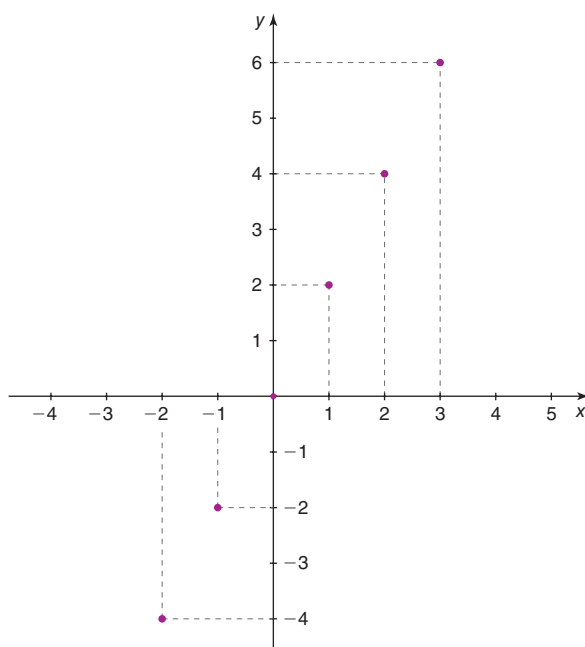
Esboços de gráficos por pontos

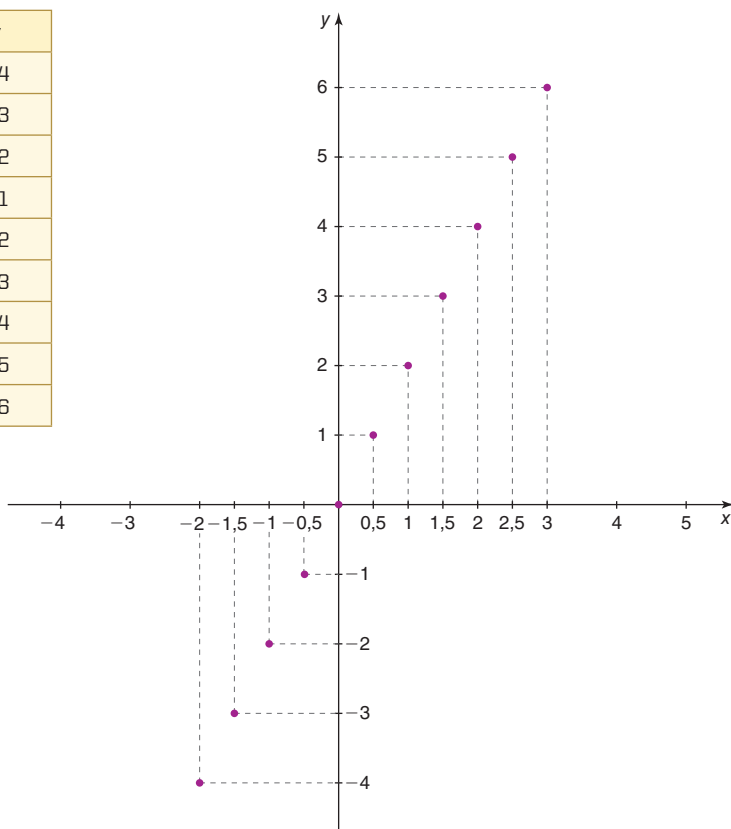
Algumas funções podem variar de modo brusco entre dois pontos relativamente próximos; por exemplo, a função representada abaixo $\left(\text{é a função } y = \text{sen}\,\frac{1}{x}\text{, que não será estudada nesta coleção}\right)$ varia tão abruptamente nas proximidades da origem que é impossível representá-la de forma gráfica com precisão.

Contudo, as funções $y = f(x)$, que estudaremos nesta coleção, apresentam pequenas variações entre dois pontos relativamente próximos. Por isso, os gráficos referentes a elas podem ser esboçados por meio de pontos que obtemos atribuindo valores a x e calculando os correspondentes valores de y.

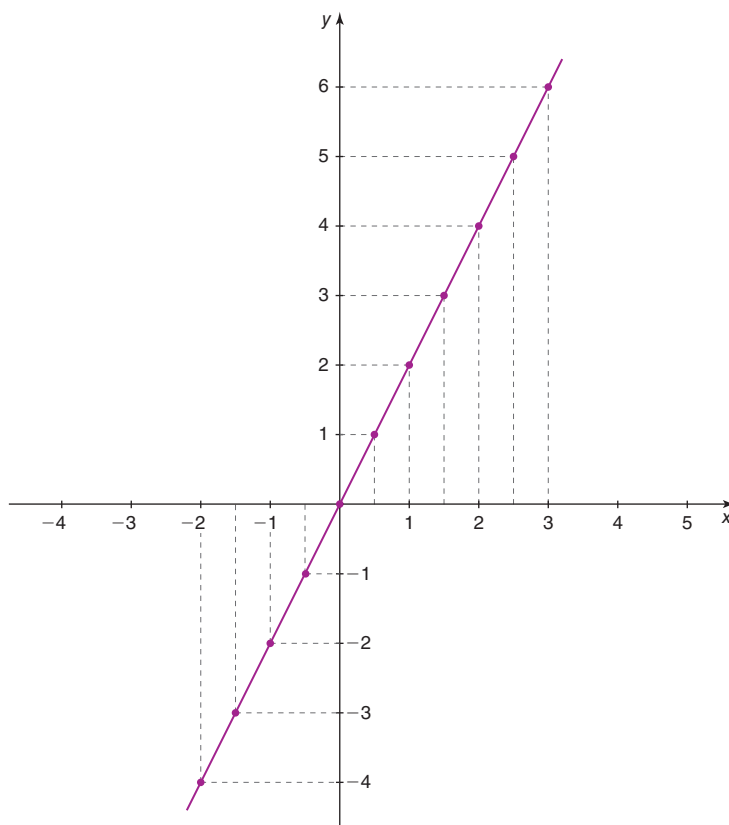
Exemplos

a) Para esboçar o gráfico da função $y = 2x$, primeiro construímos uma tabela atribuindo alguns valores a x e calculamos os correspondentes valores de y. Depois, representamos no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) assim obtidos.

x	y
−2	−4
−1	−2
0	0
1	2
2	4
3	6

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se quisermos mais pontos entre os já obtidos, podemos atribuir mais valores a x, por exemplo, a cada meia unidade:

x	y
−2	−4
−1,5	−3
−1	−2
−0,5	−1
1	2
1,5	3
2	4
2,5	5
3	6

Observamos, até aqui, que os pontos obtidos estão sobre uma mesma reta; então, é razoável admitir que o gráfico da função $y = 2x$ é a reta que contém esses pontos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Notas:

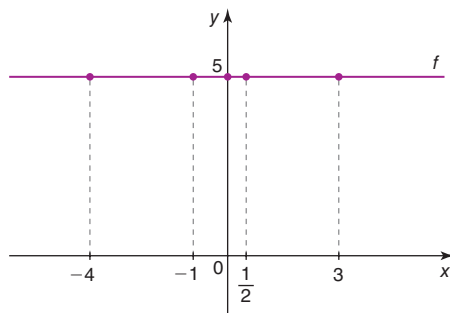
1. Em uma função $y = f(x)$ dizemos que variáveis x e y são **diretamente proporcionais** se, e somente se, para quaisquer valores correspondentes de x e y, tem-se:
   - Se $x = 0$, então $y = 0$;
   - Se $x \neq 0$, então a razão $\frac{y}{x}$ é constante.
2. Quando o gráfico de uma função $y = f(x)$ é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, os valores correspondentes de x e y são diretamente proporcionais. No exemplo anterior, temos:
   - Se $x = 0$, então $y = 0$;
   - Se $x \neq 0$, então a razão $\frac{y}{x}$ é constante, observe: $\frac{-4}{-2} = \frac{-2}{-1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \ldots$

A pressão da água sobre o mergulhador é diretamente proporcional à profundidade, porém a pressão absoluta, que é a soma das pressões da água e do ar, não é diretamente proporcional à profundidade.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Para esboçar o gráfico da função $f(x) = 5$, observamos que, para qualquer valor de x, temos $f(x) = 5$.

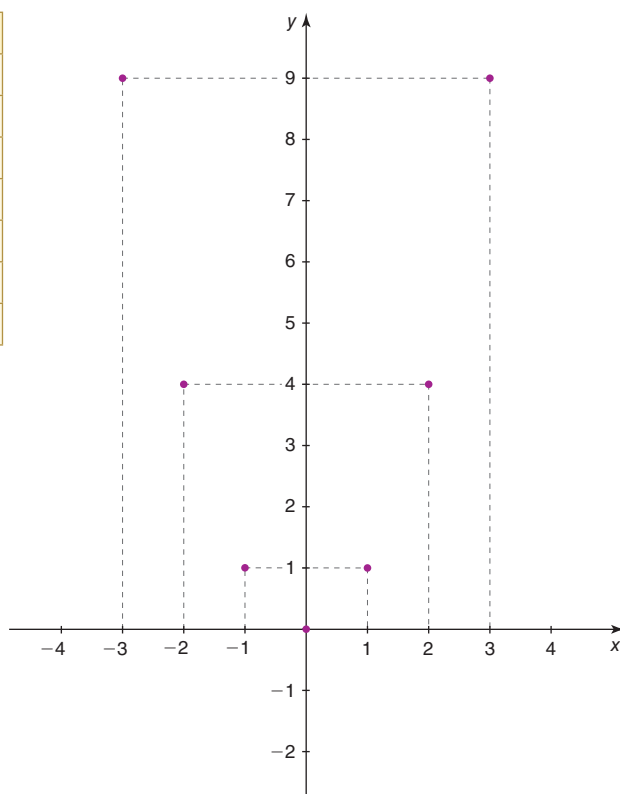
x	-4	-1	0	$\frac{1}{2}$	3
$f(x)$	5	5	5	5	5

Assim, o gráfico de f é formado por todos os pontos de ordenada 5, ou seja, é a reta paralela ao eixo Ox representada abaixo.

Nota:

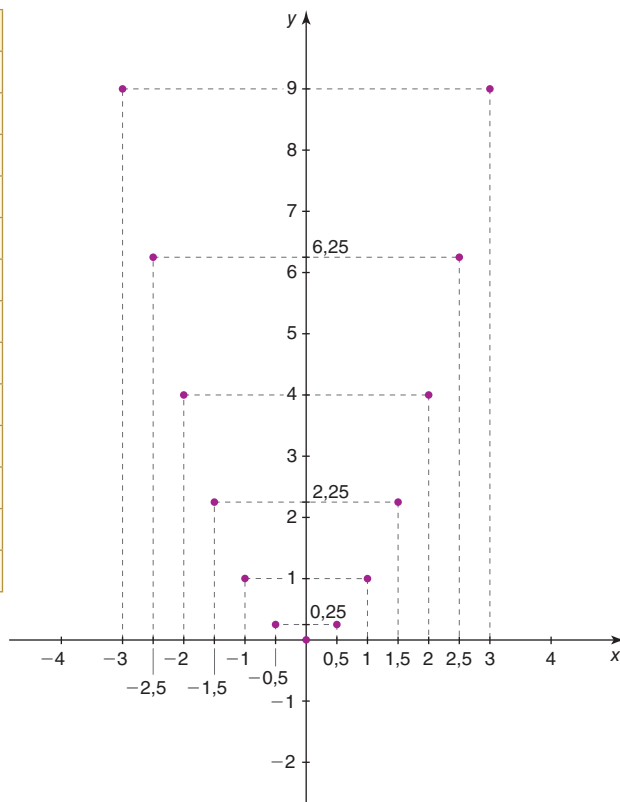
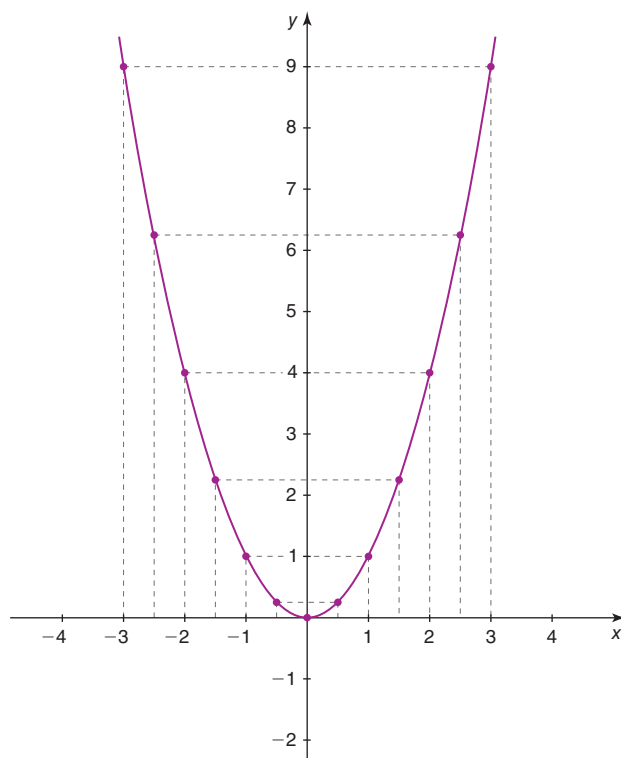
Quando a função tem a forma $f(x) = k$, sendo k uma constante real, ela é chamada de **função constante** e seu gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

O termostato de um forno de micro-ondas estabelece uma temperatura interna constante.

c) Para esboçar o gráfico de $y = x^2$, atribuímos alguns valores a x e calculamos os correspondentes valores de y. Depois, representamos no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) assim obtidos.

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Se não estivermos seguros quanto à forma do gráfico, podemos obter outros pontos além dos já determinados:

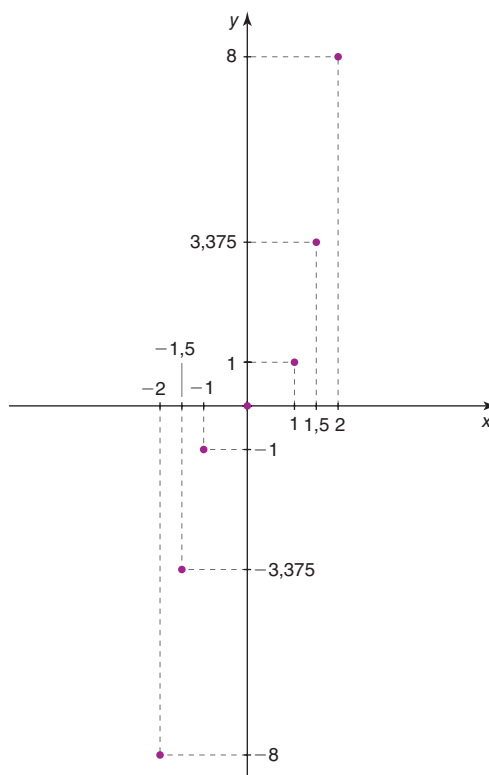
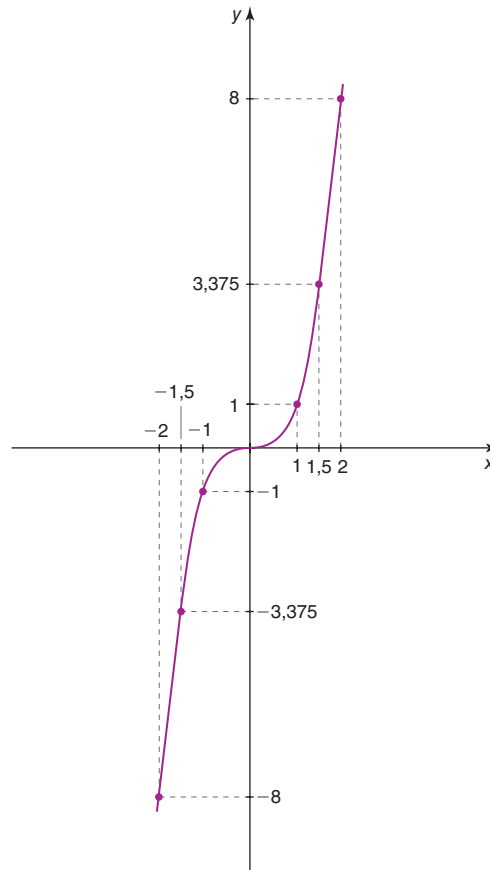
x	y
−3	9
−2,5	6,25
−2	4
−1,5	2,25
−1	1
−0,5	0,25
0	0
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4
2,5	6,25
3	9

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ligando esses pontos por uma curva "suave" — sem falhas, sem forma pontiaguda e sem variações abruptas —, delineamos o gráfico:

Nota:

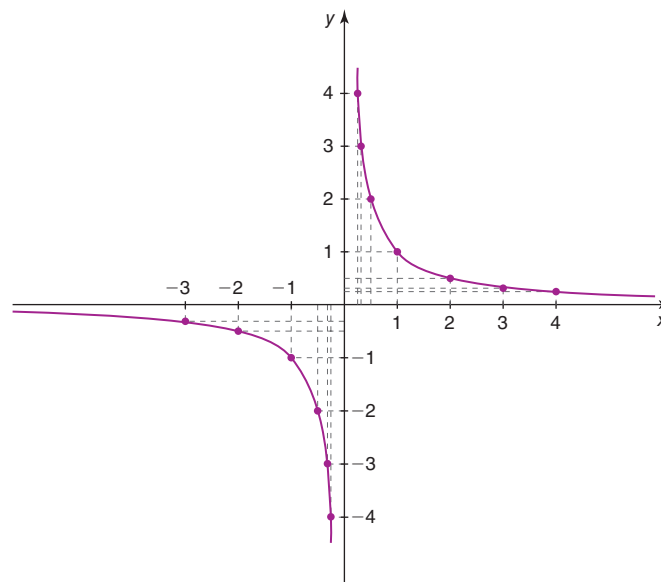
A curva desse exemplo recebe o nome de **parábola**.

d) Para esboçar o gráfico da função $y = x^3$, construímos uma tabela e representamos no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) assim obtidos.

x	y
−2	−8
−1,5	−3,375
−1	−1
0	0
1	1
1,5	3,375
2	8

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ligando esses pontos por uma curva "suave", temos:

e) Para esboçar o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, construímos uma tabela, representamos os pontos no plano cartesiano e, unindo-os por uma curva "suave", obtemos o gráfico.

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	-4	-3	-2	3	2

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Notas:

1. Tal como nesse exemplo, o gráfico de toda função do tipo $y = \frac{k}{x}$, sendo k uma constante não nula, recebe o nome de **hipérbole equilátera**.
2. Pelo fato de a distância entre a curva e os eixos coordenados tender a zero, esses eixos coordenados são chamados de **assíntotas** da hipérbole equilátera.
3. Em uma função $y = f(x)$, dizemos que as variáveis x e y são **inversamente proporcionais** se, e somente se, para qualquer valor de x e o correspondente valor de y tivermos $xy = k$, sendo k uma constante real não nula. Assim, em toda função do tipo $y = \frac{k}{x}$, com k constante e não nula, as variáveis x e y são inversamente proporcionais, pois $xy = k$. Por exemplo, na função $y = \frac{1}{x}$, temos $xy = 1$.

   Observe na tabela da página anterior os produtos dos elementos em cada coluna.

A velocidade constante do ciclista é inversamente proporcional ao tempo.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Simulador: *Transformações em um gráfico.*

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

32 Esboce o gráfico de cada função a partir de alguns pontos obtidos por uma tabela de valores x e y.

a) $y = x$
b) $y = x + 2$
c) $y = 2x^2$
d) $y = 2x^2 - 3$
e) $y = x^3 + 2$
f) $y = -\frac{1}{x}$
g) $y = \sqrt{x}$
h) $y = 2^x$
i) $y = 4$
j) $y = -3$

33 Em uma função $y = f(x)$, dizemos que x e y são diretamente proporcionais se, e somente se, para qualquer $(x, y) \in f$, temos:

I. Se $x = 0$, então $y = 0$.
II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = k$, em que k é uma constante real.

Por exemplo, na função $y = 2x$ as variáveis x e y são diretamente proporcionais, pois para qualquer $(x, y) \in f$ temos:

I. Se $x = 0$, então $y = 2 \cdot 0 = 0$.
II. Se $x \neq 0$, $\frac{y}{x} = 2$.

Em quais das funções abaixo as variáveis x e y são diretamente proporcionais?

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x$
b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x}{3}$
c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x + 3$
d) $s: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) = 4x$
e) $t: [1, 10] \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = \frac{x}{5}$
f) $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = x^2$
g) $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $v(x) = 0$

34 O exercício anterior fornece uma pista do formato do gráfico de uma função cujas variáveis são diretamente proporcionais. Se você compreendeu essa ideia, redija um texto explicando como é o gráfico desse tipo de função.

35 Esboce o gráfico de cada função.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
b) $g(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$

36 Uma pequena fábrica de xampu arca com um custo fixo de 10 mil reais mensais e um custo variável que depende do número de litros produzidos. O custo de produção de cada litro de xampu é R$ 8,00.

a) Construa uma tabela apresentando, na 1ª coluna, valores x quaisquer, com $0 \leq x \leq 5.000$, que representem o número de litros produzidos em um mês e, na 2ª, os valores correspondentes ao custo total $C(x)$(fixo + variável).
b) Esboce o gráfico da função $C(x)$ que expressa o custo total (fixo + variável) para a produção de x litros mensais, com $0 \leq x \leq 5.000$.
c) Construa uma tabela apresentando na 1ª coluna valores x quaisquer, com $1.000 \leq x \leq 5.000$, que representem o número de litros produzidos em um mês e, na 2ª coluna, a razão entre o custo fixo e o número de litros produzidos, nessa ordem. Observando a tabela, você pode concluir que os valores correspondentes nas duas colunas são direta ou inversamente proporcionais? Por quê?
d) Esboce o gráfico da função $f(x)$ que expressa a razão entre o custo fixo e o número x de litros produzidos mensalmente, com $1.000 \leq x \leq 5.000$.

37 A pressão p exercida por uma força de intensidade f sobre uma superfície de área A é calculada por $p = \frac{f}{A}$. Se a força tiver a intensidade constante de 1 unidade e a área variar no intervalo $]0, 3]$, o gráfico de p em função de A é:

a)

b)

c)

d)

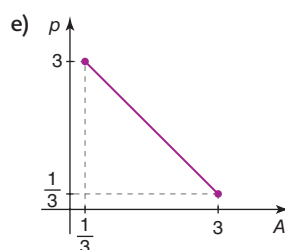
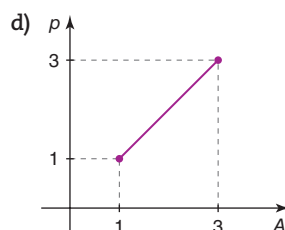
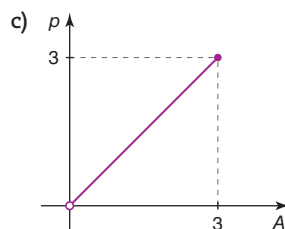
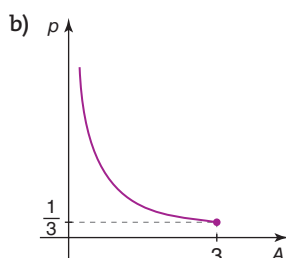
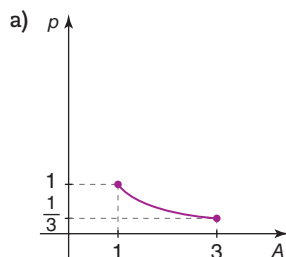
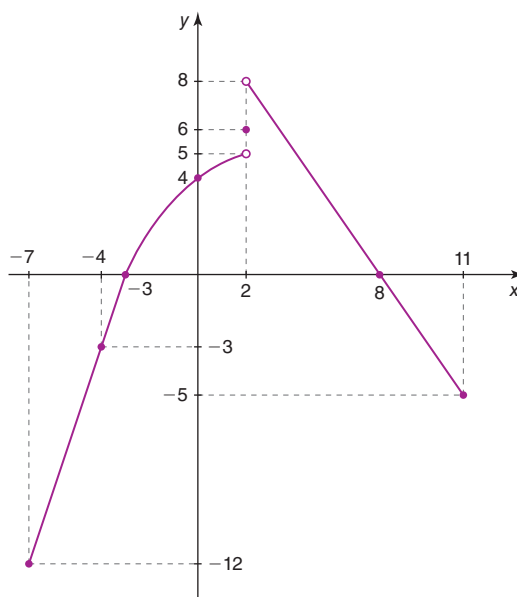
e)

Resolva os exercícios complementares 12 a 14 e 34 a 36.

Imagem de um elemento pelo gráfico de uma função

A figura abaixo é o gráfico cartesiano de uma função f.

Cada ponto (x, y) do gráfico de f deve ser interpretado como $(x, f(x))$, ou seja, a ordenada é a imagem da abscissa através de f. Por exemplo, o ponto $P(-4, -3)$ pertence ao gráfico, portanto $f(-4) = -3$. Analogamente, temos:

$(11, -5)$ pertence ao gráfico; logo, $f(11) = -5$

$(8, 0)$ pertence ao gráfico; logo, $f(8) = 0$

$(2, 6)$ pertence ao gráfico; logo, $f(2) = 6$

$(0, 4)$ pertence ao gráfico; logo, $f(0) = 4$

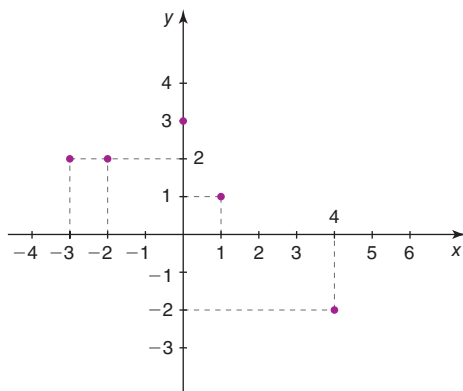
e assim por diante.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

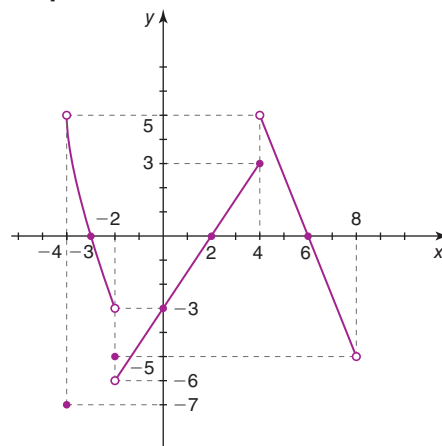
12 O gráfico abaixo representa uma função $f: A \rightarrow B$.

Calcular:

a) $f(-3)$
b) $f(-2)$
c) $f(0)$
d) $f(1)$
e) $f(4)$

Resolução

Cada ponto do gráfico é do tipo $(x, f(x))$, ou seja, a ordenada é a imagem da abscissa através de f. Como os pontos do gráfico são $(-3, 2)$, $(-2, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$ e $(4, -2)$, temos:

a) $f(-3) = 2$
b) $f(-2) = 2$
c) $f(0) = 3$
d) $f(1) = 1$
e) $f(4) = -2$

13 O gráfico abaixo representa uma função $f: [-4, 8[\rightarrow \mathbb{R}$.

Determinar:

a) $f(-4)$
b) $f(-2)$
c) $f(0)$
d) $f(2)$
e) $f(4)$
f) $f(6)$

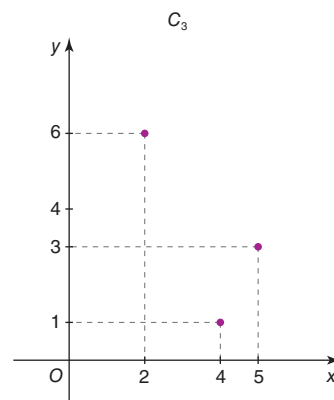
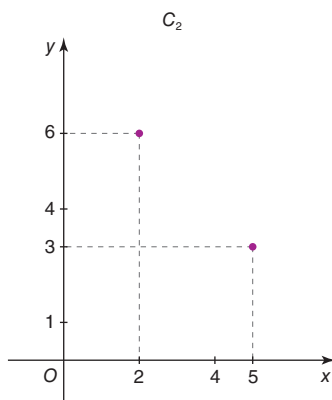
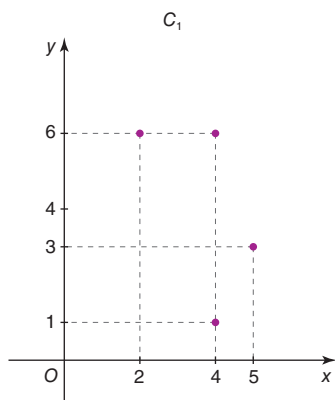
Resolução

Lembrando que o símbolo "bolinha vazia" (○) **exclui** o ponto do gráfico; que o símbolo "bolinha cheia" (●) **inclui** o ponto no gráfico; e que $f(a)$ é a ordenada do ponto do gráfico cuja abscissa é a, temos:

a) $f(-4) = -7$
b) $f(-2) = -5$
c) $f(0) = -3$
d) $f(2) = 0$
e) $f(4) = 3$
f) $f(6) = 0$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reconhecimento de uma função por análise gráfica

Os gráficos abaixo representam três relações, C_1, C_2 e C_3, do conjunto $A = \{2, 4, 5\}$ no conjunto $B = \{1, 3, 4, 6\}$:

Note que:

- Em C_1, a reta paralela ao eixo Oy, concorrente com o eixo Ox no ponto de abscissa 4, cruza o gráfico em dois pontos distintos: (4, 1) e (4, 6). Isso permite concluir que o gráfico não representa uma função de A em B, pois pelo menos um elemento de A (o elemento 4) possui mais de um correspondente em B.

- Em C_2, a reta paralela ao eixo Oy, concorrente com o eixo Ox no ponto de abscissa 4, não cruza o gráfico. Isso permite concluir que o gráfico não representa uma função de A em B, pois pelo menos um elemento de A (o elemento 4) não possui correspondente em B.
- Em C_3, qualquer reta paralela ao eixo Oy, concorrente com o eixo Ox em um ponto de abscissa em A, intercepta o gráfico em um único ponto. Isso permite concluir que o gráfico representa uma função de A em B, pois todo elemento de A possui um único correspondente em B.

Esses exemplos ajudam a entender a propriedade a seguir, que pode ser aplicada para o reconhecimento de uma função por análise gráfica.

> Um gráfico representa uma função de domínio A se, e somente se, qualquer reta paralela ao eixo Oy, concorrente com o eixo Ox em um ponto de abscissa em A, cruzar o gráfico em um único ponto.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 Qual dos gráficos representa uma função de $A = [2, 6]$ em $B = [1, 5]$?

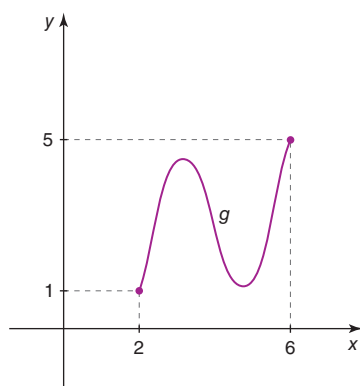



Figura 1

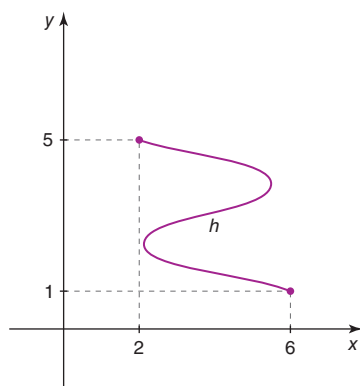
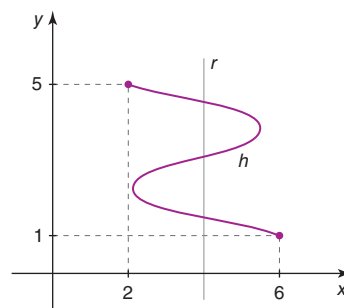
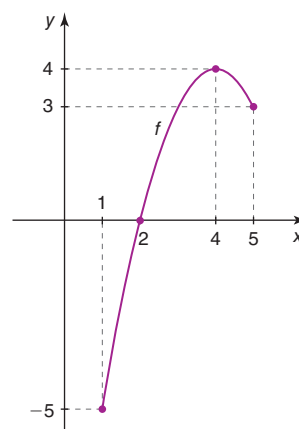



Figura 2

Resolução

Na figura 1, qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto de abscissa x, com $x \in A$, intercepta o gráfico de g em um único ponto. Isso significa que qualquer x do conjunto A está associado a um único y do conjunto B através de g. Logo, g é função de A em B.

Na figura 2, existe pelo menos uma reta paralela ao eixo Oy que intercepta o gráfico em mais de um ponto, por exemplo, a reta r representada abaixo. Logo, h não é função de A em B.

15 Determinar o domínio e o conjunto imagem da função f representada pelo gráfico abaixo.

Resolução

O domínio da função é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico, isto é, $D(f) = [1, 5]$.
O conjunto imagem da função é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico, isto é, $Im(f) = [-5, 4]$.

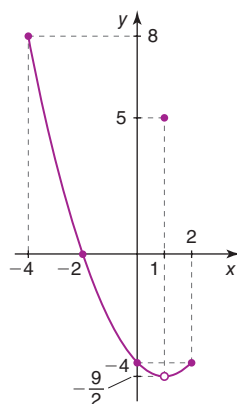
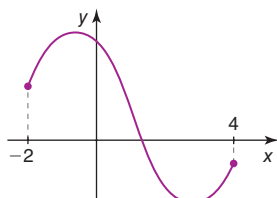
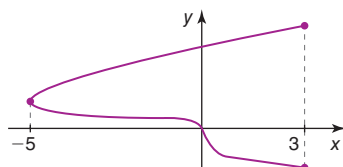
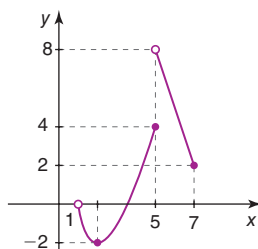
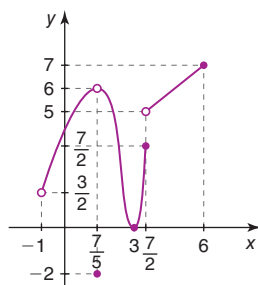
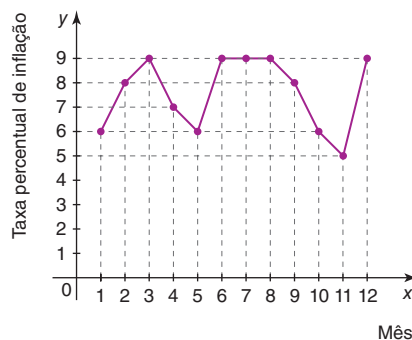
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

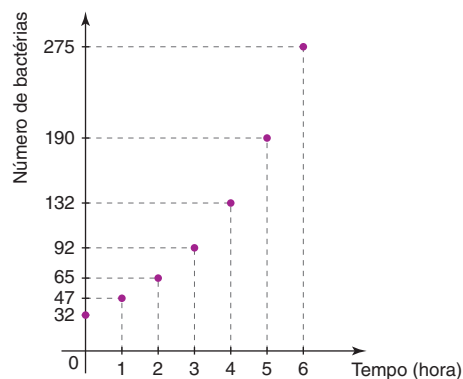
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

38 O gráfico ao lado representa a função:

$f\colon [-4, 2] \to \left]-\frac{9}{2}, 8\right]$

Calcule:

a) $f(-4)$
b) $f(-2)$
c) $f(0)$
d) $f(1)$
e) $f(3)$

39 Verifique se o gráfico abaixo representa uma função de $A = [-2, 4]$ em $\mathbb{R}$.

40 O gráfico a seguir representa uma função g de $A = [-5, 3]$ em $\mathbb{R}$. Por quê?

41 Determine o domínio e o conjunto imagem da função f representada a seguir.

42 O gráfico a seguir representa uma função f. Determine o domínio e o conjunto imagem dessa função.

43 O Ministério da Economia de certo país divulgou o balanço da inflação em determinado ano, apresentando o seguinte gráfico, em que y representa a taxa percentual de inflação no mês x.

a) Qual foi a taxa percentual de inflação no mês 4?
b) Qual foi a menor taxa percentual de inflação nesse período?
c) De quantos por cento aumentou a inflação do mês 1 para o mês 3?
d) Construa uma tabela com os dados fornecidos pelo gráfico.
e) A taxa de inflação é função do tempo? Por quê?

44 Um biólogo, ao estudar uma cultura de bactérias, contou-as num determinado instante, ao qual chamou de instante zero. No final de cada uma das seis horas seguintes, fez nova contagem das bactérias. Os resultados dessa experiência estão descritos no gráfico abaixo.

a) Qual era o número de bactérias no início da contagem, isto é, no instante zero?
b) Em quanto aumentou o número de bactérias da quinta para a sexta hora?
c) Em quanto aumentou o número de bactérias da terceira para a quinta hora?
d) O número de bactérias é função do tempo? Por quê?
e) Estime o número de bactérias no instante 5 h 12 min após o início da contagem.

Resolva os exercícios complementares 15 a 19 e 37 a 40.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Seção 2.4

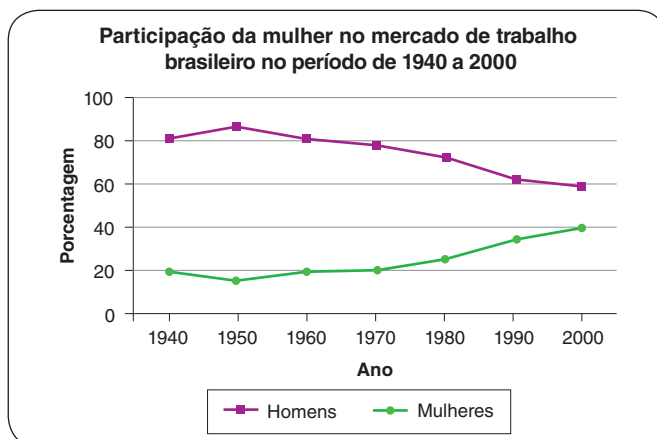
Análise de funções

Objetivos

- **Analisar** gráficos de funções.
- **Obter** as raízes de uma função.
- **Estudar** o sinal de uma função.
- **Determinar** os intervalos em que uma função é crescente, decrescente ou constante.

Termos e conceitos

- **raiz de uma função**
- **função crescente**
- **função decrescente**
- **função constante**

A linguagem gráfica é cada vez mais utilizada para transmitir informações de estudos estatísticos nos meios de comunicação. Além de proporcionar, de maneira eficaz, uma síntese de informações, ela permite uma rápida leitura. Observe o gráfico a seguir, que descreve a participação da mulher no mercado de trabalho brasileiro no período de 1940 a 2000.

Fonte: IBGE. *Anuário estatístico do Brasil*.

Uma simples leitura do gráfico fornece uma variedade de informações; por exemplo:

- Em 1950, o percentual de mulheres no mercado de trabalho era menor que 20%.
- De 1950 a 2000, o percentual de mulheres no mercado de trabalho aumentou a cada década.
- Se for mantida a tendência de crescimento do percentual de trabalho feminino, em breve o número de mulheres será igual ao número de homens no mercado de trabalho.

A Constituição Federal estabelece que são proibidas as diferenças de salários, de exercício de funções e critérios de admissão por motivo de sexo, idade, cor ou estado civil. Apesar disso, muitas empresas ainda pagam salários menores às mulheres que exercem os mesmos cargos que os homens. Grupos de ação civil vêm se organizando para garantir os mesmos direitos às mulheres trabalhadoras.

A correta interpretação dos gráficos do dia a dia depende de fundamentos matemáticos e estatísticos, alguns dos quais já estudamos. Apresentaremos a seguir mais alguns desses fundamentos.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Situações que envolvem funções*.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Raiz de uma função

A balança comercial de um país em determinado período é a diferença entre o valor monetário das exportações e o das importações, nessa ordem. Quando a balança comercial é positiva, dizemos que houve um superávit, e; quando é negativa, dizemos que houve déficit. Quando não há superávit nem déficit, dizemos que a balança comercial foi nula.

Suponha que a balança comercial de um país variou em determinado ano de acordo com a função $f(t) = t^2 - 7t + 10$, em que t representa o tempo, em mês, com $1 \leqslant t \leqslant 12$, e $f(t)$ é o valor da balança comercial em bilhão de dólares. Em quais meses desse ano a balança comercial desse país foi nula?

Para responder a essa questão, basta resolver a equação $f(t) = 0$, isto é:

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

Calculando o discriminante dessa equação do 2º grau, temos:

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$$

Assim, obtemos as raízes da equação:

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$t = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t = 2 \text{ ou } t = 5$$

Concluímos, então, que a balança comercial foi nula nos meses 2 e 5, ou seja, em fevereiro e maio. Os valores de t, 2 e 5, que anulam a função f são chamados de **raízes** de f.

Definimos:

> Chama-se **raiz** (ou **zero**) de uma função real de variável real, $y = f(x)$, todo número r do domínio de f tal que $f(r) = 0$.

Há funções que não têm raízes reais, como as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \frac{3}{x}$. Isto é, não existe nenhum valor de x que faça f ou g se anularem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 Indicar, se existirem, os zeros (ou raízes) da função $g(x) = x^4 - 9x^2$.

Resolução

Os zeros de g, se existirem, são os valores de x que anulam a função; logo, basta determinar as raízes da equação $g(x) = 0$, isto é:

$$x^4 - 9x^2 = 0$$

Fatorando o primeiro membro (colocando o fator comum em evidência), obtemos:

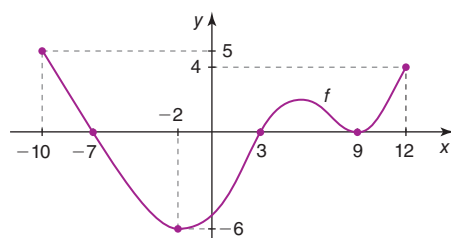
$$x^2(x^2 - 9) = 0$$

Pela propriedade do produto nulo, consideramos que pelo menos um dos fatores do primeiro membro é zero, isto é:

$$x^2 = 0 \text{ ou } x^2 - 9 = 0$$

Portanto, $x = 0$ ou $x = 3$ ou $x = -3$.

Logo, os zeros (ou raízes) da função g são 0, 3 e -3.

17 No plano cartesiano abaixo, está representado o gráfico de uma função f. Quais são as raízes de f?

Resolução

Observando que $f(-7) = 0$, $f(3) = 0$ e $f(9) = 0$, concluímos que as raízes (ou zeros) de f são: -7, 3 e 9. Note que as raízes de uma função f são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

45 Determine as raízes de cada uma das funções reais de variável real.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $y = 5x + 3$

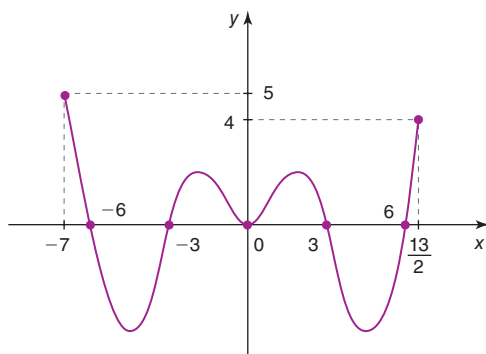
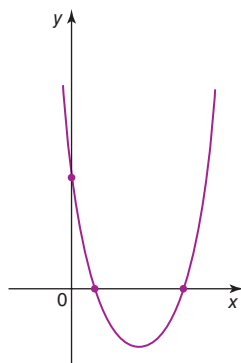
c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2$

e) $y = x^2 + 1$

f) $z(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

g) $y = -3$

46 Determine as raízes da função f cujo gráfico é dado abaixo.

47 O gráfico abaixo representa a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Determine:

a) as abscissas dos pontos onde o gráfico intercepta o eixo Ox;

b) a ordenada do ponto onde o gráfico intercepta o eixo Oy;

c) as raízes de f.

48 No plano cartesiano, represente o gráfico de uma função que tenha raízes -3, 1 e $\frac{5}{2}$.

49 A trajetória de uma bola de futebol, chutada a partir de um ponto do campo, pode ser descrita pela função $h(t) = 3t - t^2$, em que $h(t)$ representa a altura da bola, em metro, em relação ao campo, e t representa o tempo, em segundo, desde o instante do chute até o instante em que a bola atinge novamente o solo.

a) No contexto desse problema, quais são as raízes da função h?

b) Qual é a interpretação física das raízes da função h?

c) Qual era a altura da bola, em relação ao campo 1,5 segundo após o chute?

d) Na trajetória descrita pela função h, a bola atingiu 4 m de altura em relação ao campo? Justifique sua resposta.

50 Uma cidade sofre enchentes periódicas com o transbordamento de um rio.

Além do excesso de chuvas, outros fatores também causam enchentes, como o lixo jogado nas ruas, que entope os bueiros e as galerias pluviais, e a impermeabilização do solo nas áreas cimentadas e asfaltadas.

É possível avaliar a extensão da enchente medindo quanto o nível da água do rio está acima de seu nível médio. O medidor desse nível consiste de uma barra graduada, em metro, perpendicular à superfície do rio, conforme mostra a figura:

A graduação zero corresponde ao nível médio do rio; as graduações positivas correspondem a alturas acima do nível médio; e, as negativas, a alturas abaixo do nível médio.

Em certo ano, o nível da água pode ser representado pela função $f(t) = t^3 - 9t - 9t^2 + 81$, em que $f(t)$ representa o nível da água, em centímetro, e t representa o tempo, em mês, com $1 \leq t \leq 12$. Em que meses desse ano o nível da água do rio esteve em seu valor médio?

Resolva os exercícios complementares 20 a 22.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

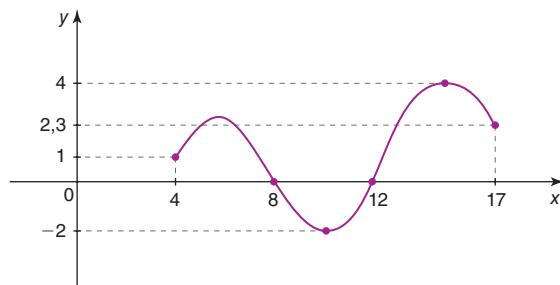
Estudo do sinal de uma função

O gráfico ao lado descreve a temperatura y de uma região, em grau Celsius, em função do tempo x, em hora, no intervalo de 4 às 17 horas de certo dia.

A análise do gráfico permite concluir que a temperatura y foi:

- positiva para $4 \leqslant x < 8$ ou $12 < x \leqslant 17$;
- negativa para $8 < x < 12$;
- nula (0 °C) para $x = 8$ ou $x = 12$.

Essa análise representa o estudo do sinal da temperatura em função do tempo no período considerado.

Estudos como esse podem ser generalizados para qualquer função real de variável real da seguinte maneira:

> Sendo f uma função de domínio D, dizemos que:
>
> - f é **positiva** para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) > 0$;
> - f é **negativa** para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) < 0$;
> - f se **anula** para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) = 0$. Nesse caso, x é raiz da função.

Exemplos

a) Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 4$, temos:

- a função é positiva para $x = -3$, pois $f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$;
- a função é negativa para $x = -1$, pois $f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$;
- a função se anula para $x = 2$, pois $f(2) = 2^2 - 4 = 0$.

Nesse exemplo, 2 é uma raiz da função f (podemos dizer, também, que 2 é um zero da função f).

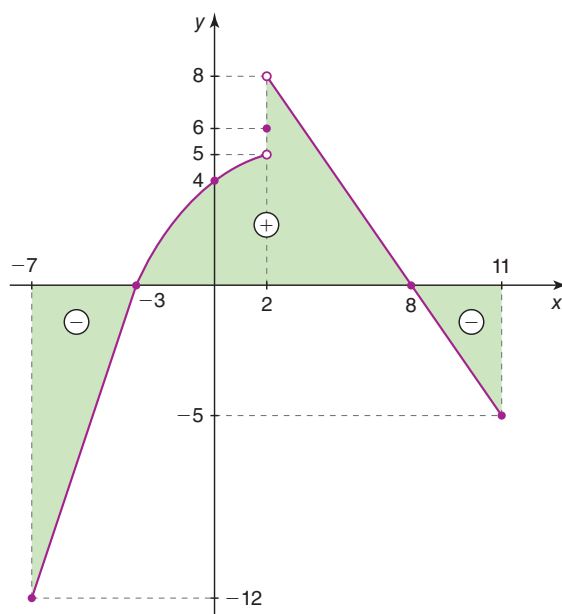
Note que o sinal da função para um elemento x do domínio é o sinal de $f(x)$, não o sinal de x.

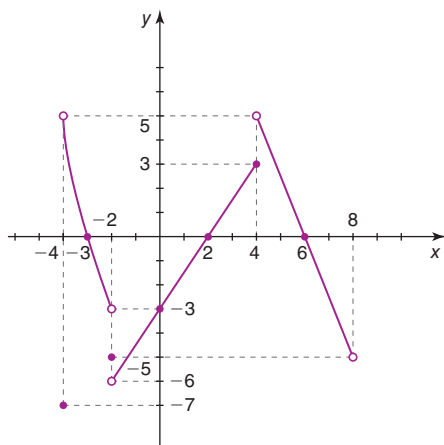
b) Considere o gráfico ao lado (em roxo) de uma função f. Podemos estudar o sinal de f analisando seu gráfico.

Dada a função f, temos:

- para todo x, com $-3 < x < 8$, temos $f(x) > 0$. Por isso, dizemos que a função f é positiva para $-3 < x < 8$;
- para todo x, com $-7 \leqslant x < -3$ ou $8 < x \leqslant 11$, temos $f(x) < 0$. Por isso, dizemos que f é negativa para $-7 \leqslant x < -3$ ou $8 < x \leqslant 11$;
- para $x = -3$ ou $x = 8$, a função se anula, ou seja, $f(-3) = f(8) = 0$ (os números -3 e 8 são as raízes da função).

Note que as raízes da função são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo Ox.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

18 O gráfico abaixo representa uma função $f: [-4, 8[\rightarrow \mathbb{R}$.

Determinar:

a) Os valores de x para os quais $f(x) > 0$.

b) Os valores de x para os quais $f(x) < 0$.

c) Os valores de x para os quais $f(x) = 0$.

Resolução

Lembramos que o símbolo "bolinha vazia" (○) **exclui** o ponto do gráfico; que o símbolo "bolinha cheia" (●) **inclui** o ponto no gráfico; e que $f(a)$ é a ordenada do ponto do gráfico cuja abscissa é a. Assim:

a) devemos determinar todos os valores do domínio da função cujas imagens, através de f, sejam positivas. Esses valores são todos os números reais do eixo Ox tais que:

$$-4 < x < -3 \text{ ou } 2 < x < 6$$

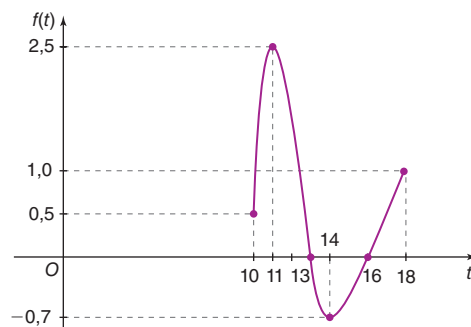
b) devemos determinar todos os valores do domínio da função cujas imagens, através de f, sejam negativas. Esses valores são todos os números reais do eixo Ox tais que:

$$x = -4 \text{ ou } -3 < x < 2 \text{ ou } 6 < x < 8$$

c) devemos determinar todos os valores do domínio da função cujas imagens, através de f, sejam iguais a zero. Esses valores, chamados de raízes da função, são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo Ox. Assim, temos:

$$x = -3 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 6$$

19 A Bolsa de Valores de São Paulo – Bovespa – era a bolsa oficial do Brasil até realizar a fusão com a BM&F, que culminou com a criação de uma nova instituição, denominada BM&F Bovespa, em 8 de maio de 2008. Sua sede fica no centro da cidade de São Paulo e seu principal índice econômico é o Ibovespa.

O gráfico a seguir descreve o Ibovespa (Índice da Bolsa de Valores do Estado de São Paulo) $f(t)$, em porcentagem, em função do horário t, em hora, desde o início do pregão, às 10 h, até o fechamento, às 18 h, de determinado dia.

a) Qual foi o maior valor atingido pelo Ibovespa nesse dia? Em que horário esse valor foi atingido?

b) Qual foi o menor valor atingido pelo Ibovespa nesse dia? Em que horário esse valor foi atingido?

c) Em que horários desse dia o Ibovespa foi nulo?

d) No período do pregão, em que horários o Ibovespa esteve positivo?

e) No período do pregão, em que horários o Ibovespa esteve negativo?

Resolução

a) Observando que $f(11) = 2{,}5$ e que $2{,}5 \geqslant f(t)$ para qualquer t do domínio de f, concluímos que o maior valor do Ibovespa nesse dia foi 2,5% e que esse valor foi atingido às 11 horas.

b) Observando que $f(14) = -0{,}7$ e que $-0{,}7 \leqslant f(t)$ para qualquer t do domínio de f, concluímos que o menor valor do Ibovespa nesse dia foi $-0{,}7$% e que esse valor foi atingido às 14 horas.

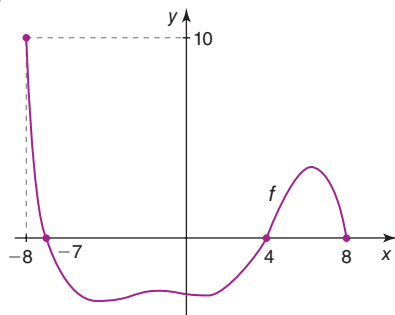
c) A função f se anula nos pontos de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas. Logo, o Ibovespa foi nulo às 13 horas e às 16 horas.

d) Cada ponto do gráfico é da forma $(t, f(t))$, portanto, os pontos que têm $f(t) > 0$ são aqueles localizados acima do eixo Ot. Esses pontos têm a abscissa t obedecendo à condição $10 \leqslant t < 13$ ou $16 < t \leqslant 18$. Logo, no período do pregão, o Ibovespa esteve positivo antes das 13 horas e depois das 16 horas.

e) Cada ponto do gráfico é da forma $(t, f(t))$, portanto, os pontos que têm $f(t) < 0$ são aqueles localizados abaixo do eixo Ot. Esses pontos têm a abscissa t obedecendo à condição $13 < t < 16$. Logo, no período do pregão, o Ibovespa esteve negativo entre 13 e 16 horas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

51 O gráfico abaixo representa uma função f de $[-8, 8]$ em $\mathbb{R}$.

Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) $f(-8) > f(5)$

b) $f(0) > 0$

c) $f(-7) = 0$

d) $f(4) > 0$

e) $f(2) < 0$

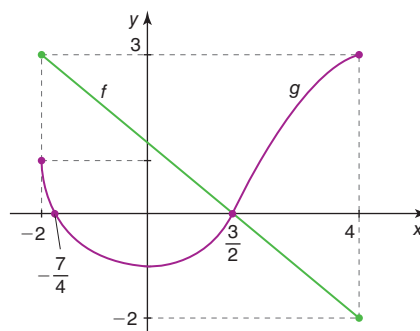
f) $f\left(-\frac{15}{2}\right) < 0$

g) Se $4 < x < 8$, então $f(x) > 0$.

h) Se $4 \leqslant x \leqslant 8$, então $f(x) > 0$.

i) Se $-7 < x < 4$, então $f(x) < 0$.

j) Se $f(x) > 0$, então $-8 \leqslant x < -7$ ou $4 < x < 8$.

52 No plano cartesiano abaixo, estão representados os gráficos de duas funções, f e g, de domínio $[-2, 4]$ e contradomínio $\mathbb{R}$.

Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação:

a) $f(3) > 0$

b) $f(2) < 0$

c) $f(1) > 0$

d) $f(-1) > 0$

e) $f(0) < 0$

f) $g(3) > 0$

g) $g(2) > 0$

h) $g(0) > 0$

i) $f\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(-\frac{7}{4}\right)$

j) $f(3) \cdot g(3) < 0$

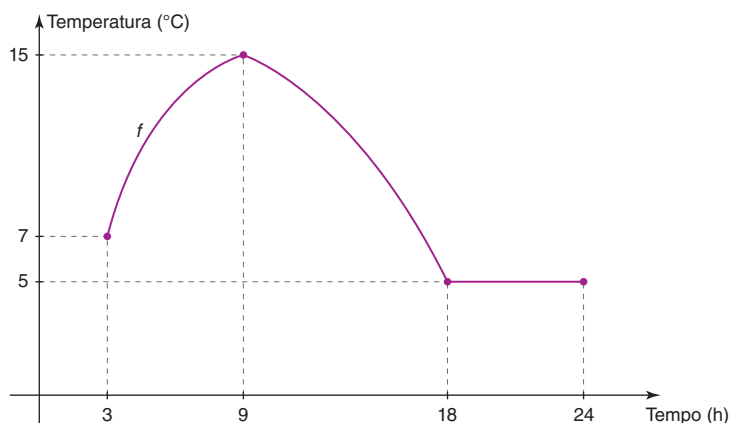
k) $f\left(\frac{18}{10}\right) \cdot g\left(\frac{18}{10}\right) < 0$

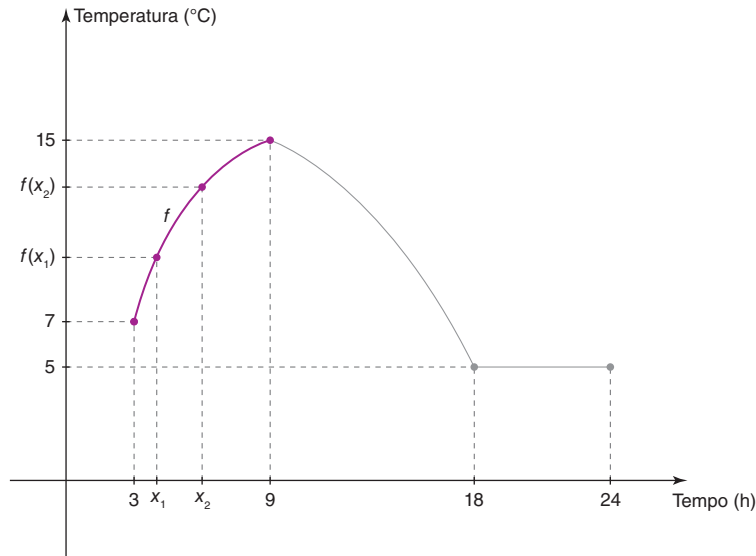
Resolva os exercícios complementares 23 e 24.

Variação de uma função

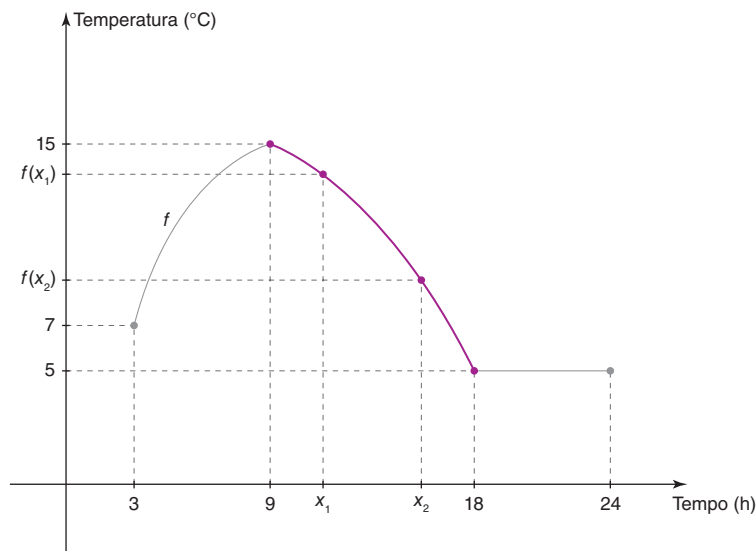
Para limpar uma câmara frigorífica, um operário desligou os motores às 3 h, quando a temperatura interna da câmara era 7 °C. A limpeza foi realizada das 3 h às 9 h, e nesse período a temperatura subiu de 7 °C para 15 °C. Após o término da limpeza, os motores foram religados, de modo que, das 9 h às 18 h, a temperatura desceu de 15 °C para 5 °C e, a partir daí, permaneceu constante em 5 °C.

Após o registro das temperaturas no interior da câmara das 3 h às 24 h, constatou-se que o gráfico abaixo representa a função f que expressa a temperatura y, em grau Celsius, no interior da câmara em função do tempo x, em hora.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Destacamos nesse gráfico que:

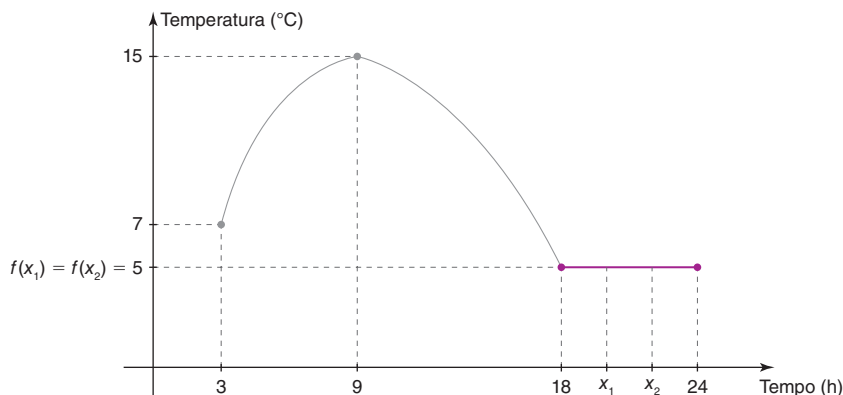
- No intervalo de 3 h a 9 h, quanto maior o tempo, maior é a temperatura, isto é, se $\{x_1, x_2\} \subset [3, 9]$, com $x_2 > x_1$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Por isso, dizemos que a função f é **crescente** no intervalo $[3, 9]$.

Uma função f é **crescente** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 de A, com $x_2 > x_1$, a imagem de x_2 é maior que a imagem de x_1 através de f. Isto é, f é crescente se, e somente se:

$$\{x_1, x_2\} \subset A \text{ e } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

- No intervalo de 9 h a 18 h, quanto maior o tempo, menor é a temperatura, isto é, se $\{x_1, x_2\} \subset [9, 18]$, com $x_2 > x_1$, então $f(x_2) < f(x_1)$. Por isso, dizemos que a função f é **decrescente** no intervalo $[9, 18]$.

Uma função f é **decrescente** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 de A, com $x_2 > x_1$, a imagem de x_2 é menor que a imagem de x_1 através de f. Isto é, f é decrescente se, e somente se:

$$\{x_1, x_2\} \subset A \text{ e } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- No intervalo de 18 h a 24 h, a temperatura é sempre a mesma para qualquer valor do tempo, isto é, para qualquer x pertencente ao intervalo [18, 24], $f(x) = 5$. Por isso, dizemos que a função f é **constante** no intervalo [18, 24]

Uma função f é **constante** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para qualquer número x de A, temos $f(x) = k$, sendo k uma constante real.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Taxa média de variação de uma função.*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

20 Mostrar que a função $f(x) = 3x + 2$ é crescente em todo o domínio $\mathbb{R}$.

Resolução

Vamos considerar dois números reais quaisquer, x_1 e x_2, tais que: $x_2 > x_1$

Multiplicamos por 3 ambos os membros dessa desigualdade: $3x_2 > 3x_1$

Adicionamos 2 a ambos os membros da última desigualdade, obtendo:

$$\underbrace{3x_2 + 2}_{f(x_2)} > \underbrace{3x_1 + 2}_{f(x_1)}$$

Assim, provamos que, para quaisquer números reais x_1 e x_2, com $x_2 > x_1$, temos $f(x_2) > f(x_1)$. Logo, f é uma função crescente.

(*Nota*: Também poderíamos ter esboçado o gráfico de f e, com ele, concluir que f é crescente em todo o domínio da função.)

21 Durante certo período, as temperaturas de uma região foram registradas e constatou-se que, em determinado dia, a temperatura $f(t)$, em grau Celsius, pode ser representada pela função $f(t) = \dfrac{3 + t}{t}$, em qualquer instante t, em hora, com $t > 0$. Mostrar que a temperatura decresceu ao longo desse dia.

Resolução

Mostraremos que f é uma função decrescente para $t > 0$. Para isso, vamos considerar dois instantes, a e b, com $0 < a < b$, assim, temos:

$$\begin{cases} b > a \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Multiplicamos por 3 ambos os membros dessa desigualdade:

$$\frac{3}{b} < \frac{3}{a}$$

Adicionamos 1 a ambos os membros da desigualdade:

$$\frac{3}{b} + 1 < \frac{3}{a} + 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{3 + b}{b}}_{f(b)} < \underbrace{\frac{3 + a}{a}}_{f(a)}$$

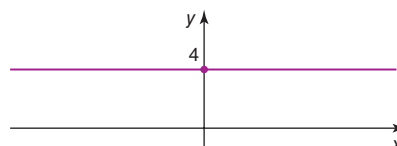
Com isso concluímos que, para quaisquer números a e b do domínio de f, temos:

$$b > a \Rightarrow f(b) < f(a)$$

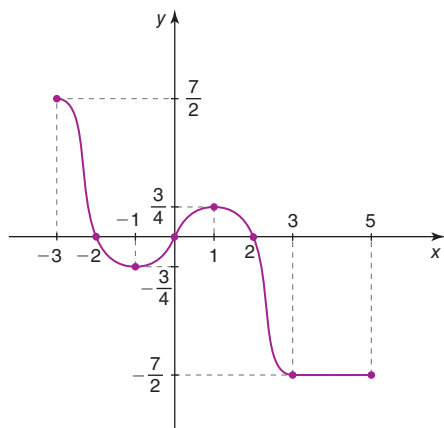
Ou seja, a função f é decrescente em todo o domínio de f. Logo, no contexto do problema, mostramos que a temperatura decresceu ao longo do dia.

22 Construir o gráfico da função $f(x) = 4$.

Resolução

Para qualquer valor x do domínio $\mathbb{R}$, temos $f(x) = 4$; logo, o gráfico de f é uma reta paralela ao eixo Ox, formada por todos os pontos de ordenada 4.

Nesse caso, a função f é constante em todo o seu domínio.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

53 Uma função f é representada pelo gráfico abaixo.

a) Em que intervalo(s) do domínio a função f é crescente?

b) Em que intervalo(s) do domínio a função f é decrescente?

c) Em que intervalo(s) do domínio a função f é constante?

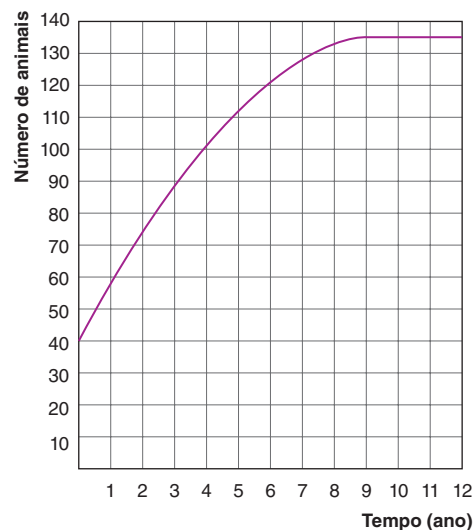
54 Classifique como crescente, decrescente ou constante cada uma das funções f, g, h e p descritas nos itens seguintes. Escreva um texto no caderno explicando seu raciocínio.

a) De janeiro a junho de 2010, o preço de uma mochila era R$ 52,00, não sofrendo alteração. A função f fornece o preço dessa mochila em função do tempo, de janeiro a junho de 2010.

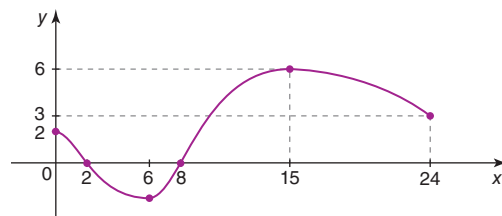
b) Uma mangueira ligada a uma torneira alimenta uma piscina. A função g fornece o volume de água contida na piscina em função do tempo, desde a abertura da torneira até o completo enchimento.

c) Um ralo escoa a água de uma piscina. A função h fornece o volume de água contida na piscina em função do tempo, desde a abertura do ralo até o esvaziamento total.

d) Um motorista parte com seu automóvel da cidade A com destino à cidade B, parando apenas durante uma hora para almoçar. A função p expressa a distância percorrida pelo automóvel em função do tempo, desde o momento da partida da cidade A até o momento da chegada à cidade B.

55 Um estudo de doze anos analisou a variação do número de animais silvestres em uma reserva florestal. Essa variação é descrita pelo seguinte gráfico:

Sabendo que todos os animais são nativos da própria reserva e que nenhum deles jamais foi retirado de lá, pode-se concluir que, durante esse estudo, o número de nascimentos foi igual ao número de mortes de animais no intervalo:

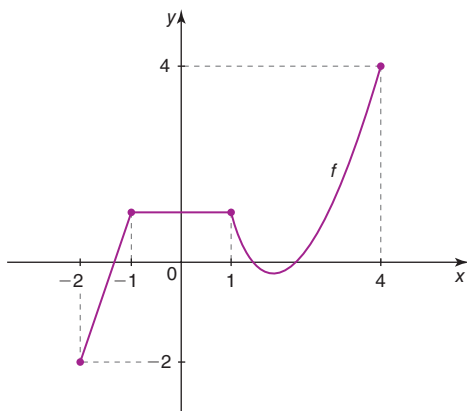
a) de 0 a 2 anos
b) de 2 a 4 anos
c) de 4 a 6 anos
d) de 7 a 9 anos
e) de 9 a 12 anos

56 O gráfico abaixo apresenta a temperatura y, em grau Celsius, em uma região, em função do tempo x, em hora, ao longo das 24 horas de um dia de inverno.

Determine os intervalos de tempo em que:

a) a temperatura foi crescente.

b) a temperatura foi decrescente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

57 (Ufac) O gráfico abaixo é de uma função f definida no intervalo $[-2, 4]$.

Considere as proposições:

I. A função é crescente somente no intervalo $[-2, -1]$.

II. A função $g(x) = f(x) + 2$, com $-2 \leqslant x \leqslant 4$, é tal que $g(-2) = 0$.

III. No intervalo $[-1, 1]$ a função é constante.

IV. A função possui exatamente três raízes no intervalo $[-2, 4]$.

Com relação às proposições I, II, III e IV, é correto afirmar que:

a) todas são verdadeiras;
b) todas são falsas;
c) apenas a afirmação IV é falsa;
d) apenas a afirmação I é falsa;
e) as afirmações I e II são falsas.

58 Usando a definição de função decrescente, mostre que a função $y = 5 - 2x$ é decrescente em todo o seu domínio.

59 Em um trecho de uma estrada, a velocidade v de um caminhão, em quilômetro por hora, em função do tempo t, em hora, pode ser calculada por $v(t) = 6t + 60$.

a) Durante esse trecho, sejam t_1 e t_2 dois valores quaisquer do tempo, em hora. Mostre que se $t_1 > t_2$, então $v(t_1) > v(t_2)$.

b) De acordo com o que você demonstrou no item **a**, é possível concluir que o caminhão esteve em movimento acelerado ou retardado? (O movimento é acelerado ou retardado conforme a velocidade v do caminhão seja crescente ou decrescente.)

60 Durante certo período, o volume v, em litro, de água contida em uma piscina variou em função do tempo t, em hora, de acordo com a função $v(t) = 90.000 - 10t$.

a) No período considerado, sejam t_1 e t_2 dois valores quaisquer do tempo, em hora. Mostre que se $t_1 > t_2$, então $v(t_1) < v(t_2)$.

b) De acordo com o que você demonstrou no item **a**, é possível concluir que a piscina estava sendo enchida ou esvaziada, no período considerado?

61 Considere a função f cujo domínio é o salário médio dos executivos de uma empresa, calculado a cada mês, e o contradomínio é o conjunto dos números reais, tal que $f(x)$ é a diferença entre o salário médio dos executivos e o salário médio dos outros funcionários da empresa, nessa ordem, calculado a cada mês.

a) Sob que condições essa função é crescente?
b) Sob que condições essa função é decrescente?
c) Sob que condições essa função é constante?
d) Se o salário médio dos executivos crescer e também crescer o salário médio dos outros funcionários, é possível que a função f decresça? Explique.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolva os exercícios complementares 25 e 41 a 43.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

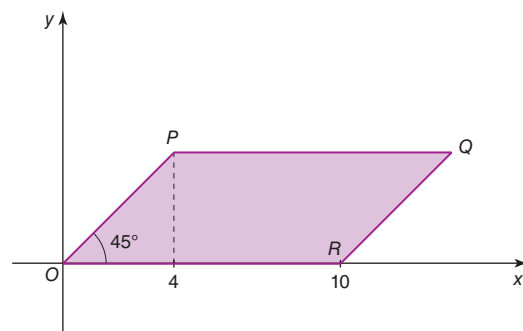
1 Para que valor real de t o ponto $A\left(\frac{4t}{5} + 1; 2t - 4\right)$ pertence ao eixo das ordenadas?

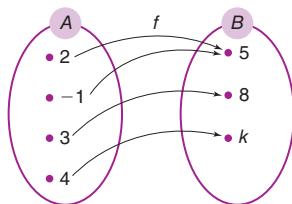
2 Represente no plano cartesiano:

a) todos os pontos (x, y) tal que $x = 0$
b) todos os pontos (x, y) tal que $y = 0$
c) todos os pontos (x, y) tal que $y = x$
d) todos os pontos (x, y) tal que $y = -x$

3 No plano cartesiano, um triângulo tem vértices $A(1, 0)$, $B(5, 0)$ e $C(3, 6)$.

a) Calcule a área do triângulo ABC.
b) Calcule o perímentro do triângulo ABC.

4 O quadrilátero $OPQR$, representado no plano cartesiano a seguir, é um paralelogramo. Determine as coordenadas do ponto Q.

5 O diagrama ao lado representa uma função $f: A \to B$, sendo k uma constante real.
Determine o número k, sabendo que

$$\frac{f(2)}{f(4) - f(3)} = f(-1).$$

6 Sendo a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x^2 - x$, determine:

a) O elemento do contradomínio de f que é imagem do número 5.
b) O(s) elemento(s) x do domínio de f que possui (possuem) como imagem o número 2.

7 Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ é tal que $f(2) = 5$, $f(3) = 8$ e $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$, $\forall\, a, b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Calcule:

a) $f(6)$ **c)** $f(27)$ **e)** $f(1)$
b) $f(4)$ **d)** $f(72)$ **f)** $f\left(\frac{1}{4}\right)$

8 Obtenha o conjunto dos valores reais de x para os quais está definida cada função a seguir (essa é outra maneira de pedir o domínio de uma função).

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^4 - 5x^2 + 4}$

b) $y = \dfrac{5}{x^4 - 16} + \sqrt{1 - x}$

c) $u(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1}$

d) $v(x) = \dfrac{7}{x^2 - 3} - \sqrt{5 - 2x}$

9 (FCC) Para que valores reais de k a função real de variável real $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + k}$ tem como domínio o conjunto $\mathbb{R}$?

a) $k > 1$ **c)** $k < 1$ **e)** $k \neq 1$
b) $k \geq 1$ **d)** $k \leq 1$

10 (UFRN) Seja $f: D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$, a função definida por $f(x) = \sqrt{5 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$. O domínio D é:

a) $[-1, 5]$ **d)** $]-1, 5]$
b) $[5, +\infty[$ **e)** $]5, +\infty[- \{-1\}$
c) $]5, +\infty[$

11 (UFPE) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ tem como conjunto imagem:

a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$ **d)** $\mathbb{R}_+$
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 4\}$ **e)** $\mathbb{R}_+^*$
c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$

12 Esboce o gráfico de cada função a partir de alguns pontos obtidos por uma tabela de valores x e y.

a) $y = -x$ **e)** $y = \dfrac{2}{x}$ **i)** $y = 1$

b) $y = x - 2$ **f)** $y = \dfrac{1}{x - 2}$ **j)** $y = -\pi$

c) $y = \dfrac{x^2}{2}$ **g)** $y = \sqrt[3]{x}$

d) $y = (x - 3)^2$ **h)** $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

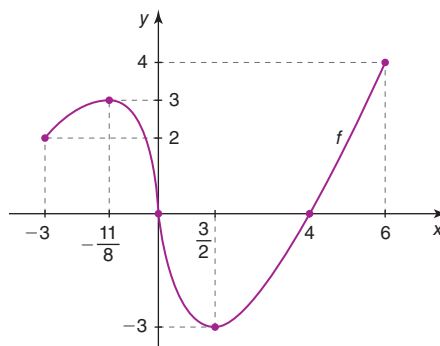
13 Em uma função $y = f(x)$, dizemos que x e y são inversamente proporcionais se, e somente se, para qualquer $(x, y) \in f$ tem-se $x \cdot y = k$, em que k é uma constante real não nula. Por exemplo, na função $y = \dfrac{2}{x}$ as variáveis são inversamente proporcionais, pois $x \cdot y = 2$ para qualquer par ordenado (x, y) da função.

a) Se x e y são inversamente proporcionais, descreva a forma do gráfico de y em função de x no caso em que $x \cdot y = k$, com $k > 0$.
b) Se x e y são inversamente proporcionais, descreva a forma do gráfico de y em função de x no caso em que $x \cdot y = k$, com $k < 0$.

14 Esboce o gráfico de cada função.

a) $h(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $s(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

15 A figura abaixo é o gráfico de uma função f.

Classifique cada uma das afirmações a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F).

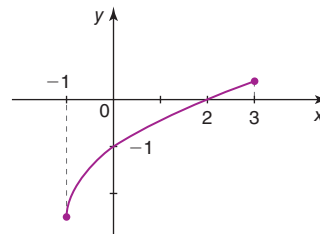
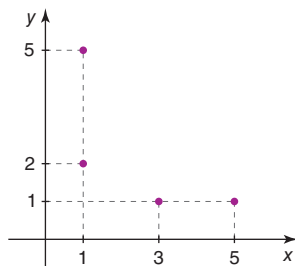
a) $\left(\frac{3}{2}, -3\right) \in f$
b) O ponto de f de abscissa 4 é o ponto (4, 0).
c) O ponto de f de abscissa -2 tem ordenada menor que 2.
d) Existe apenas um ponto de f com ordenada -3.
e) Existe apenas um ponto de f com ordenada 3.
f) Existem exatamente três pontos de f com ordenada 2.

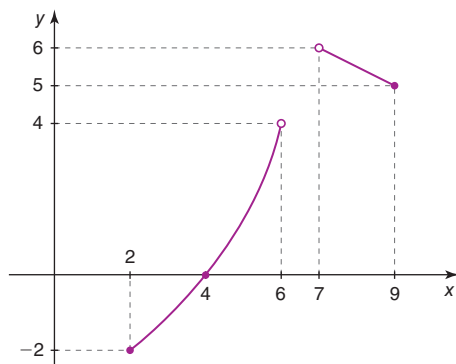
16 (Ufal) Seja f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, uma função definida por $f(x) = mx + p$, em que m e p são constantes reais. Se os pontos $(-2, 7)$ e $(2, -1)$ pertencem ao gráfico de f, então $m - p$ é igual a:

a) -6 **b)** -5 **c)** -3 **d)** 1 **e)** 6

17 (Fuvest-SP) A figura a seguir representa o gráfico de uma função da forma $f(x) = \dfrac{x + a}{x + b}$, para $-1 \leq x \leq 3$.

a) Determine os valores de a e b.
b) Calcule $f(3) - f(-1)$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

18 Uma relação de $A = \{1, 3, 5\}$ em $B = \{-1, 1, 2, 4, 5\}$ tem o seguinte gráfico:

Essa relação é uma função de *A* em *B*? Por quê?

19 Determine o domínio e o conjunto imagem da função *f* representada a seguir.

20 Encontre, se existirem, as raízes das seguintes funções:

a) $y = \frac{2}{x-3} - \frac{x}{x+3}$

b) $y = x^4 - 3x^2 - 4$

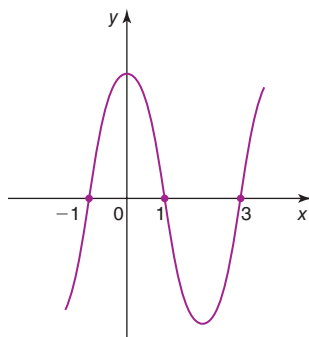
c) $h(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

d) $t(x) = \sqrt{x+6} - x$

e) $y = \sqrt{x} + 9$

f) $f(x) = 5$

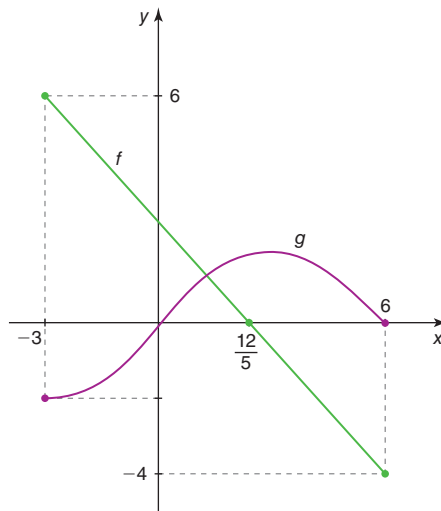
g) $g(x) = 0$

21 (Uerj) O gráfico a seguir é a representação cartesiana da função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$.

A soma $a + b$ é igual a:

a) 4 **b)** −4 **c)** 2 **d)** −2 **e)** 0

22 (UFRN) A soma de todos os zeros da função $f(x) = (x^2 - 5x + 4)(x^4 - 16)$ é:

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

23 No plano cartesiano abaixo, estão representadas duas funções, *f* e *g*, de domínio $[-3, 6]$ e contradomínio $\mathbb{R}$.

Determine os valores de *x* tais que:

a) $f(x) = 0$

b) $g(x) = 0$

c) $f(x) > 0$

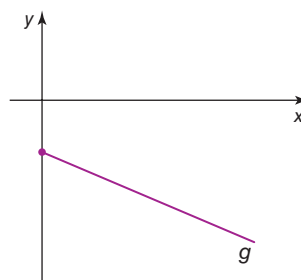
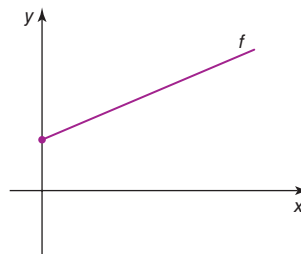
d) $f(x) < 0$

e) $g(x) > 0$

f) $g(x) < 0$

g) $f(x) \cdot g(x) < 0$

h) $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$

24 As semirretas representadas nos planos cartesianos abaixo representam duas funções *f* e *g*.

Considerando a função *h* definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para qualquer *x*, com $x \in \mathbb{R}_+$, podemos afirmar que:

a) a função *h* possui pelo menos uma raiz.

b) todos os pontos do gráfico da função *h* estão acima do eixo Ox.

c) todos os pontos do gráfico da função *h* estão abaixo do eixo Ox.

d) há pelo menos um ponto do gráfico de *h* cuja ordenada é positiva.

e) $h(0) \cdot h(1) = 0$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

25 Aplicando as definições de função crescente e função decrescente, prove que a função $y = x^2$ é crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$.

Exercícios contextualizados

26 Para o controle do tráfego metroviário, um sistema cartesiano ortogonal foi associado ao plano por onde transitam os trens do metrô de uma cidade. Duas estações, P e Q, são ligadas por um trajeto retilíneo e podem ser determinadas pelos pares ordenados $P(1, 7)$ e $Q(4, 11)$, em que as coordenadas estão em quilômetro. Qual é a distância percorrida por um trem no trajeto $\overline{PQ}$?

27 Um edifício tem só um apartamento por andar, exceto no andar térreo, onde há apenas a recepção. Os andares são numerados a partir do zero: 0 (térreo), 1 (primeiro andar), 2 (segundo andar) etc., e os apartamentos são numerados a partir do número 1, do primeiro ao último andar: 1, 2, 3, ..., respectivamente.
Considere a correspondência que associa cada número de andar a um número de apartamento. Desse modo:

a) o número 0 de andar está associado a que número de apartamento?

b) o número 2 de andar está associado a que número de apartamento?

c) a numeração dos apartamentos é função da numeração dos andares? Por quê?

28 Por meio de um estudo sobre o consumo C de energia elétrica de uma fábrica, em quilowatt-hora, em função do tempo t, em dia, concluiu-se que $C = 400t$.

a) Qual é o consumo de energia elétrica dessa fábrica em 8 dias?

b) Quantos dias são necessários para que o consumo atinja 4.800 kWh?

c) Se a empresa adquirir uma máquina que consuma 200 kWh diários, qual será a equação que descreve o consumo total da fábrica em função do tempo?

29 (Uepa) O empregado de uma empresa ganha mensalmente x reais. Sabe-se que ele paga de aluguel R$ 120,00 e gasta $\frac{3}{4}$ de seu salário em sua manutenção, poupando o restante. Então:

a) encontre uma expressão matemática que defina a poupança P em função do seu salário x.

b) para poupar R$ 240,00, qual deverá ser seu salário mensal?

30 (UCSal-BA) Um restaurante cobra de seus clientes um preço fixo por pessoa: R$ 15,00 no almoço e R$ 12,00 no jantar. Certo dia, dos 120 clientes que compareceram a esse restaurante, x foram atendidos no jantar. Se foram gastos R$ 6,00 no preparo de cada refeição, a expressão que define o lucro L, em reais, obtido nesse dia, em função de x, é:

a) $L(x) = 120x - 720$

b) $L(x) = 1.440x - 720$

c) $L(x) = -6x + 1.440$

d) $L(x) = -4x + 720$

e) $L(x) = -3x + 1.080$

31 Em uma refinaria de petróleo, uma rachadura num reservatório de gasolina provocou um grande vazamento. Os técnicos responsáveis pelo conserto estimaram que, a partir do instante em que ocorreu a avaria, o volume V de gasolina restante no reservatório (em quilolitro) em função do tempo t (em hora) podia ser calculado pela lei: $V(t) = -2t^2 - 8t + 120$.

a) Qual era a quantidade de gasolina restante no reservatório 3 horas depois da ocorrência da avaria?

b) Calcule a capacidade desse reservatório sabendo que ele estava completamente cheio no momento em que ocorreu a rachadura.

c) Qual será o tempo necessário para que o reservatório fique vazio, caso os técnicos não consigam realizar o conserto?

d) Para que os técnicos consigam salvar 80% da gasolina do reservatório, em quanto tempo deverão realizar o conserto?

32 (UEL-PR) Tome uma folha de papel em forma de quadrado de lado igual a 21 cm e nomeie os seus vértices A, B, C, D, confrme a figura 1. A seguir, dobre-a, de maneira que o vértice D fique sobre o "lado" AB (figura 2). Seja D′ esta posição do vértice D e x a distância de A a D′.

Figura 1

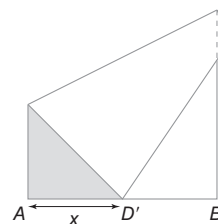



Figura 2

A função que expressa a área do triânculo retângulo sombreado em função de x é:

a) $A = \dfrac{-x^3 + 441x}{42}$

b) $A = \dfrac{x^3 - 441x}{84}$

c) $A = \dfrac{-x^3 + 441x}{84}$

d) $A = \dfrac{441 - x^2}{84}$

e) $A = \dfrac{441 - x^2}{42}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

33 (Unifesp) A tabela mostra a distância *s* em centímetro que uma bola percorre descendo por um plano inclinado em *t* segundos.

t	*s*
0	0
1	32
2	128
3	288
4	512

A distância *s* é função de *t* dada pela expressão $s(t) = at^2 + bt + c$, onde *a*, *b*, *c* são constantes. A distância *s* em centímetros, quando $t = 2{,}5$ segundos, é igual a:

a) 248 **b)** 228 **c)** 208 **d)** 200 **e)** 190

34 Uma máquina fabrica 2 metros de corda por minuto.

a) Complete a tabela abaixo com a produção de corda dessa máquina, em metro, para os seguintes tempos de funcionamento da máquina, em minuto.

Tempo (min)	Produção (m)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

b) Os valores do tempo e os correspondentes valores da produção dessa máquina são direta ou inversamente proporcionais? Por quê?

c) Indicando por *y* a produção, em metro, para o funcionamento de *x* minutos da máquina, qual é a equação que expressa *y* em função de *x*?

d) Qual é o gráfico da função do item **c** admitindo-se qualquer valor *x* do tempo, com $x \geqslant 0$?

35 No mês de janeiro de 2009, uma indústria gastou R$ 28.800,00 com o consumo de 1.600 hL (hectolitros) de óleo diesel. Não houve alteração no preço do óleo diesel em 2009.

a) Qual foi o gasto, em real, dessa indústria com óleo diesel em novembro, quando o consumo foi de 2.200 hL de diesel?

b) Indicando por *y* o gasto dessa indústria, em real, com *x* hL de diesel, qual é a equação que expressa *y* em função de *x*?

c) Na função do item **b**, as variáveis *x* e *y* são diretamente proporcionais? Por quê?

d) Qual é o gráfico da função do item **b** admitindo-se qualquer valor *x* para o consumo, com $x \geqslant 0$?

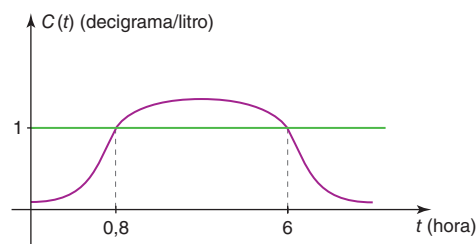
36 Considere que a população de insetos que sobrevivem numa plantação é inversamente proporcional à quantidade de agrotóxicos utilizada para combatê-los. Quando se utilizaram 10 L de agrotóxicos, a população sobrevivente foi estimada em 2.000 insetos.

a) Quantos litros de agrotóxicos deveriam ter sido utilizados para que a população de insetos sobreviventes fosse reduzida a 400 indivíduos?

b) Dê a lei que expressa a população sobrevivente $f(x)$ de insetos na plantação em função da quantidade *x*, em litro, de agrotóxicos utilizada.

c) Considerando a função *f* obtida no item anterior, complete a tabela abaixo e represente no plano cartesiano os pontos obtidos.

Quantidade de agrotóxicos (litro)	População de insetos (número de indivíduos)
x	$f(x)$
5	
10	2.000
16	
20	
25	
32	

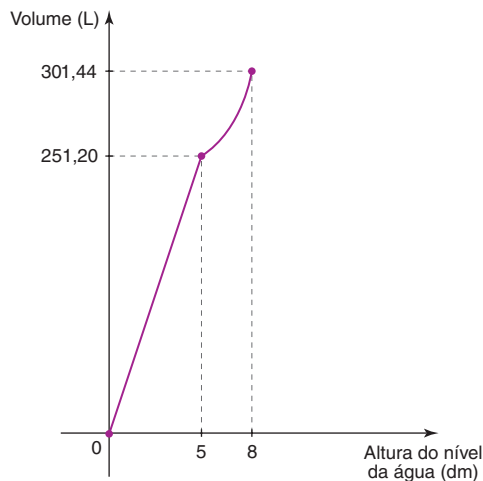
37 (Vunesp) Uma empresa farmacêutica lançou no mercado um analgésico. A concentração do analgésico, denotada por $C(t)$, em decigrama por litro de sangue, *t* horas após ter sido administrado a uma pessoa, está representada no gráfico esboçado a seguir. Sabe-se que esse analgésico só produz efeito se sua concentração for superior a 1 decigrama por litro de sangue.

(Obs.: o gráfico não está em escala.)

Analisando o gráfico, determine:

a) após ter sido administrado, quantos minutos decorrerão para que o analgésico comece a fazer efeito;

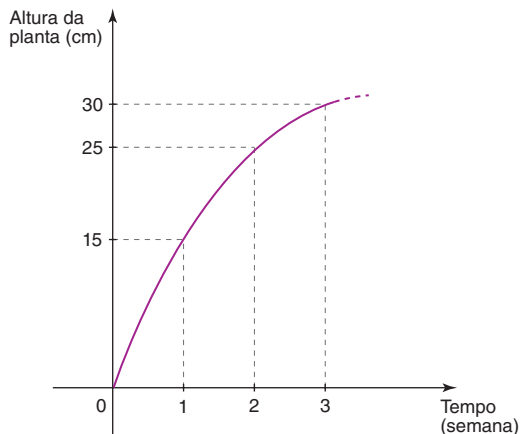
b) por quanto tempo a ação do analgésico permanecerá.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

38 O gráfico abaixo apresenta o volume de água, em litro, de um reservatório em função da altura do nível da água, em decímetro.

a) Qual é o volume de água quando o nível da água atinge 5 dm?

b) Qual é o volume de água quando o nível da água atinge 8 dm?

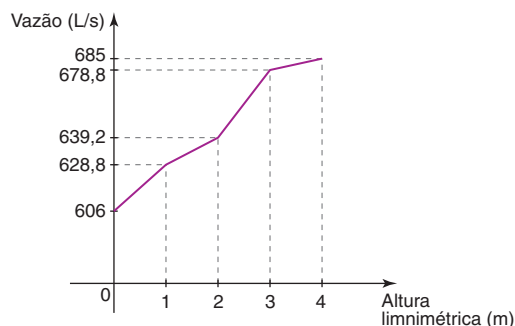
c) Qual é a variação do volume de água quando o nível varia de 5 a 8 dm?

39 O gráfico a seguir representa o crescimento de uma planta, em centímetro, em função do tempo, em semana.

a) Qual era a altura da planta ao final da terceira semana?

b) Qual foi o crescimento da planta durante a terceira semana?

c) Durante qual das três semanas registradas ocorreu o maior desenvolvimento da planta?

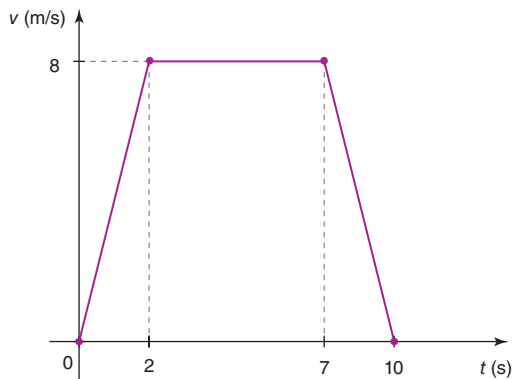
40 Em épocas de chuvas, as enchentes provocadas pelo transbordamento de rios e córregos causam grandes problemas. A incidência de enchentes pode ser prevista pela análise da vazão de um rio em função de sua altura **limnimétrica**. A altura limnimétrica é medida com o **limnógrafo**, que registra continuamente a variação do nível de um rio, adotando como **nível normal** ou **nível 0** (zero) o nível do rio fora da estação de chuvas.

Um engenheiro, estudando a vazão de um rio em litro por segundo (L/s), construiu o gráfico abaixo, que mostra a vazão em função da altura limnimétrica, em metro.

a) Qual é a vazão do rio para a altura limnimétrica zero?

b) Qual é a vazão do rio se ele estiver 4 m acima do nível normal?

c) Se o rio se mantiver, durante 2 horas, 3 m acima do nível normal, qual será a vazão total nesse período de tempo?

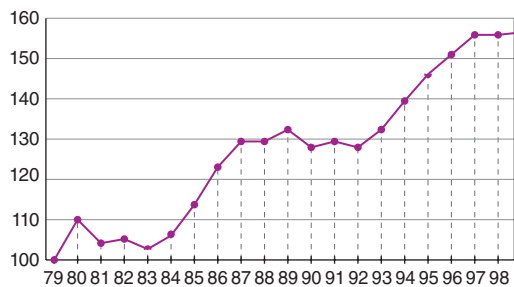
d) Sabendo que ocorre enchente somente se a vazão chega a 40.000 litros por minuto, haverá enchente se o rio estiver 3 m acima do nível normal?

41 O gráfico a seguir mostra a velocidade v de um automóvel em função do tempo t.

a) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é crescente?

b) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é decrescente?

c) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é constante?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

42 (Unifor-CE) No gráfico abaixo, tem-se a evolução do produto interno bruto (PIB) brasileiro nas duas últimas décadas do século XX, tomando como base o valor de 100 unidades no ano de 1979.

Fonte: IBGE
(Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística)

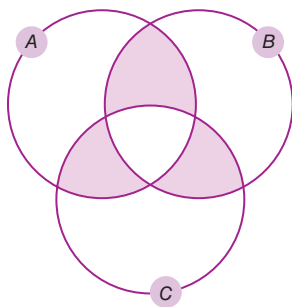
De acordo com esse gráfico, é correto concluir que:

a) Os valores do PIB foram crescentes no período de 1980 a 1989.
b) Os valores do PIB foram decrescentes no período de 1987 a 1992.
c) A diferença entre os valores do PIB dos anos 1989 e 1987 foi igual à dos anos 1992 e 1990.
d) Os valores do PIB foram sempre crescentes.
e) O crescimento do valor do PIB foi maior no período de 1979 a 1980 do que no período de 1993 a 1994.

43 Durante certo período, a pressão interna p de um recipiente variou em função do tempo t conforme a função $p(t) = \frac{t+1}{t}$, em que as unidades de p e t são atmosfera e minuto, respectivamente. Mostre que durante esse período a pressão decresceu com o passar do tempo.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 A região sombreada do diagrama abaixo representa:

a) $(A \cap B \cap C) - (A \cup B)$
b) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
c) $[(A \cap B) \cup (A \cap C)] - (A \cap B \cap C)$
d) $[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$
e) $(A \cup B) \cap (A \cup B) \cap (B \cup C)$

2 Sejam A e B conjuntos quaisquer. Se $x \notin A$ ou $x \notin B$, então, em relação a um universo U, podemos concluir que:
a) $x \in A'$
b) $x \in B'$
c) $x \in (A' \cup B)$
d) $x \in (A \cap B)'$
e) $x \in (A' \cap B)$

3 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada proposição a seguir.
a) Se o número $x + y$ é irracional e x é racional, então y é irracional.
b) Se o produto xy é um número irracional e y é irracional, então x é irracional.
c) Se o quociente $\frac{x}{y}$ é um número irracional e x é irracional, então y é racional.
d) Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $\sqrt[n]{a}$ é irracional, então $a \in \mathbb{N}$.

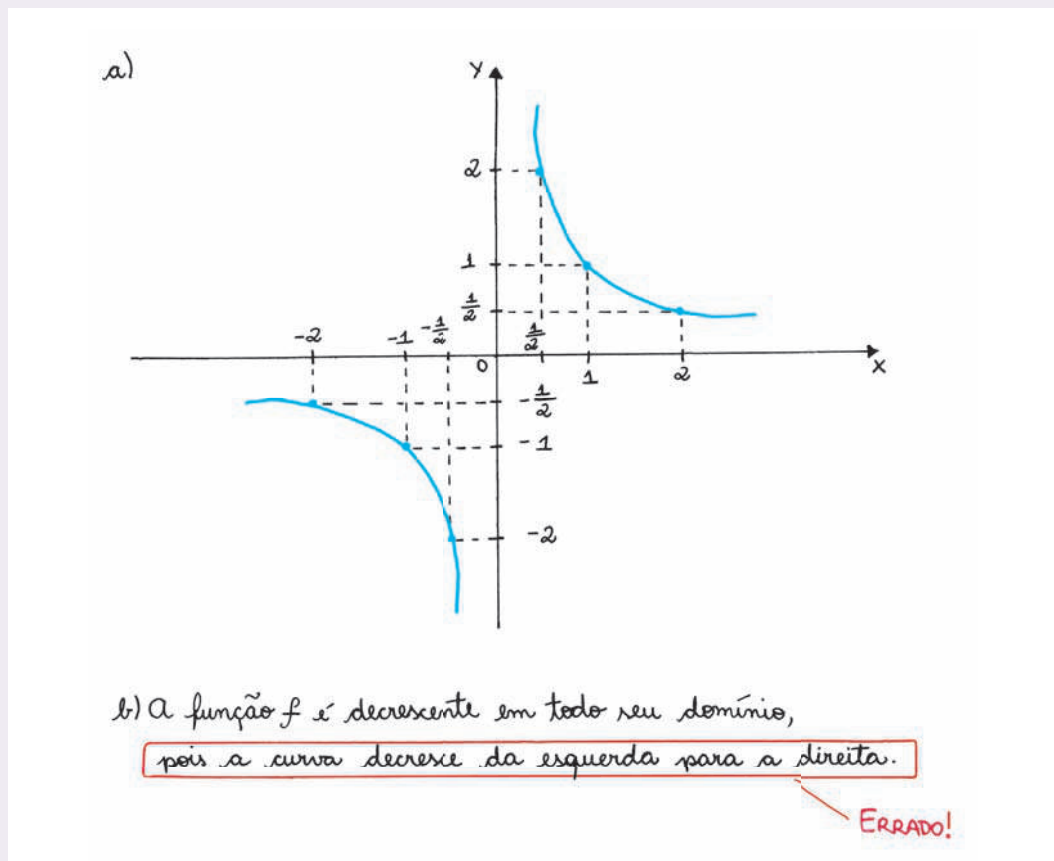
❯ **Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.**

Exercício

Considerando a função f: $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

a) esboce seu gráfico;

b) descreva os intervalos onde f é crescente, decrescente ou constante.

Resolução

Comentário

a) O esboço do gráfico apresentado está correto. Poderíamos, ainda, acrescentar que os eixos Ox e Oy são assíntotas do gráfico, isto é, a distância entre o gráfico e cada um dos eixos tende a zero.

b) A resposta que o aluno deu a esse item é incorreta, pois, para que f fosse decrescente em todo o domínio $\mathbb{R}^*$, deveria ser obedecida a seguinte condição: "para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a $\mathbb{R}^*$, com $x_2 > x_1$, tem-se $f(x_2) < f(x_1)$". Verifique que essa condição não é obedecida para todos os valores do domínio.

❯ **Agora, refaça a resolução do item b, corrigindo-a.**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.